Universität Konstanz *WS 10/11*
Fachbereich Mathematik und Statistik
J. Schropp, G. Koch

ÜBUNGEN ZU **Differential-Algebraische Gleichungen**

http://www.math.uni-konstanz.de/∼schropp/dae.html

Blatt 4 **Abgabe: 17.12.2010**

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Vorgelegt sei die DAE eines Mehrkörpersystems in klassischer Formulierung

$$\begin{aligned} q' &= v \\ M(q,v)v' &= f(q,v) - Dg(q)^T\lambda \\ 0 &= g(q) \end{aligned} \tag{1}$$

mit $q, v \in \mathbb{R}^N$, $\lambda \in \mathbb{R}^l$ und in GGL-Formulierung

$$\begin{aligned} M(q,v)q' &= M(q,v)v - Dg(q)^T\mu \\ M(q,v)v' &= f(q,v) - Dg(q)^T\lambda \\ 0 &= g(q) \\ 0 &= Dg(q)v \end{aligned} \tag{2}$$

mit $M(q,v)$ invertierbar, $\mathrm{rg}(Dg(q)) = l$ und glatten Funktionen M, f und g. Es sei $(q(t), v(t), \lambda(t), \mu(t))$, $t \in I$ eine Lösung von (2). Zeigen Sie:

(i) $\mu(t) \equiv 0$ und $(q(t), v(t), \lambda(t))$, $t \in I$ löst (1).

(ii) Die DAE (2) hat den Differentiationsindex 2.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Vorgelegt sei die autonome DGL

$$y' = f(y) \tag{3}$$

$f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen, f global lipschitzstetig. Es sei $h \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^s)$, $s < N$, $M = \{p \in \Omega \,|\, h(p) = 0\}$, 0 regulärer Wert für h. Ferner sei M eine invariante Menge für (3), d.h. für Anfangswerte in M liegt die Lösung für alle Zeiten t, für welche sie existiert, in M, Zur numerischen Berechnung von Lösungen zu Anfangswerten in M stabilisiert man (3) gemäß

$$y' = f(y) - \gamma Dh(y)^T (Dh(y)Dh(y)^T)^{-1} h(y)\,, \quad \gamma > 0\,. \tag{4}$$

Ferner gelte: $||Dh(y)f(y)|| \leq \gamma_0 ||h(y)||\,,\ y \in \Omega$. Zeigen Sie:

(i) Für Anfangswerte $y_0 \in M$ sind die Lösungen von (3) und (4) identisch.

(ii) Für $y_0 \notin M$ und $\gamma > 0$ hinreichend groß, ist die Menge M attraktiv für (4), d.h. für Lösungen $\hat{y}(t)$ von (4), welche für $t \geq 0$ existieren, gilt

$$\operatorname{dist}(\hat{y}(t), M) \to 0 \quad \text{für } t \to \infty\,.$$

(iii) Finden Sie eine Index 2 DAE, so dass die Lösungen der DAE und (3)-(4) für $y_0 \in M$ übereinstimmen, falls $f, h \in C^2$ sind.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Wir betrachten das Pendel in der Index 1,2 und 3 Formulierung

$$\begin{aligned}
x_1' &= v_1 \\
x_2' &= v_2 \\
mv_1' &= -2\lambda x_1 \\
mv_2' &= mg - 2\lambda x_2 \\
0 &= x_1^2 + x_2^2 - l^2 && \text{Index 3} \\
0 &= x_1 v_1 + x_2 v_2 && \text{Index 2} \\
0 &= v_1^2 + v_2^2 - \frac{2l^2}{m}\lambda + g x_2 && \text{Index 1}
\end{aligned}$$

mit $(x_1^0, x_2^0, v_1^0, v_2^0, \lambda^0) = (1, 0, 0, 0, 0)$. Die GGL-Formulierung lautet

$$\begin{aligned}
mx_1' &= mv_1 - 2x_1\mu \\
mx_2' &= mv_2 - 2x_2\mu \\
mv_1' &= -2\lambda x_1 \\
mv_2' &= mg - 2\lambda x_2 \\
0 &= x_1^2 + x_2^2 - l^2 \\
0 &= x_1 v_1 + x_2 v_2
\end{aligned}$$

mit $(x_1^0, x_2^0, v_1^0, v_2^0, \lambda^0, \mu^0) = (1, 0, 0, 0, 0, 0)$. Es sei $m = g = l = 1$ und $t \in [0, 100]$.

Lösen Sie die Pendelgleichung in den jeweiligen Formulierungen mit dem Verfahren `Radau5`. Laden Sie dazu die Dateien `dr_mpend_Idx123.m`, `mpend_Idx123.m`, `dr_mpend_Idx2_GGL.m`, `mpend_Idx2_GGL.m` und `radau5.m` von der Vorlesungsseite herunter. Dateien mit `dr_*.m` sind die zu startenden Treiberdateien und Dateien mit `mpend_*.m` beinhalten die benötigten Funktionen.

(i) Implementieren Sie die obigen Formulierungen in `mpend_*.m`.

(ii) Zeichnen Sie die Abweichungen aller 3 Zwangsbedingungen. Was sehen Sie?

Abgabe per Email an `gilbert.koch@uni-konstanz.de`.