Universität Konstanz *WS 10/11*
Fachbereich Mathematik und Statistik
J. Schropp, G. Koch

Übungen zu **Differential-Algebraische Gleichungen**

http://www.math.uni-konstanz.de/~schropp/dae.html

Blatt 5 **Abgabe: 21.01.2011**

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Vorgelegt sei die semi-explizite DAE

$$u' = f(u, \lambda) \tag{1}$$
$$0 = g(u, \lambda) \tag{2}$$

mit $f \in C^2(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^l, \mathbb{R}^N)$ und $g \in C^2(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^l, \mathbb{R}^l)$. Es gelte die Index-1 Bedingung:

$$\frac{\partial g}{\partial \lambda}(u, \lambda) \text{ invertierbar für alle } (u, \lambda) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^l\,.$$

Ferner existiere eine C^2-Funktion $\psi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^l$ mit

$$g(u, \lambda) = 0, \;\; (u, \lambda) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^l \Leftrightarrow \lambda = \psi(u)\,.$$

Ein stationärer Zustand für die DAE (1)-(2) ist ein Punkt $(u^*, \lambda^*) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^l$ mit

$$0 = f(u^*, \lambda^*)\,,$$
$$0 = g(u^*, \lambda^*)\,.$$

Sei (u^*, λ^*) ein solcher stationärer Punkt, so dass die Eigenwerte der Matrix

$$\left(\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial \lambda}\frac{\partial g}{\partial \lambda}^{-1}\frac{\partial g}{\partial u}\right)(u^*, \lambda^*)$$

einen Realteil kleiner Null besitzen. In diesem Fall ist nämlich der stationäre Punkt (u^*, λ^*) asymptotisch stabil für die DAE (1)-(2).

Die DAE (1)-(2) werde mit einer steif genauen ($A_{is} = b_i, i = 1, ..., s$) ε- Einbettungsmethode mit Schrittweite Δt diskretisiert.

(i) Leiten Sie mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen für hinreichend kleine Δt für u lokal bei u^* die Form

$$u_{n+1} = G(\Delta t, u_n)\,,$$
$$\lambda_{n+1} = \Psi(u_{n+1})$$

her mit $G(\Delta t, u) = U_s(\Delta t, u)$.

(ii) Zeigen Sie:

$$G(\Delta t, u^*) = u^*\,, \qquad \frac{\partial G}{\partial u}(\Delta t, u^*) = I + \Delta t \left(\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial \lambda} \frac{\partial g}{\partial \lambda}^{-1} \frac{\partial g}{\partial u} \right)(u^*, \lambda^*) + O(\Delta t^2)$$

für $\Delta t > 0$ hinreichend klein.

(iii) Weisen Sie nach, dass der Fixpunkt u^* für $G(\Delta t, \cdot)$ stabil ist, d.h. es gilt für den Spektralradius

$$\rho \left(\frac{\partial G}{\partial u}(\Delta t, u^*) \right) < 1$$

für $\Delta t > 0$ hinreichend klein.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Wir betrachten das Problem

$$Mu' = \phi(u)\,, \tag{3}$$

wobei $M \in \mathbb{R}^{N,N}$ eine konstante Matrix ist.

(i) Zeigen Sie die Äquivalenz von (3) zu einem semi-expliziten Problem der Form

$$\begin{aligned} y' &= f(y, z)\,, \\ 0 &= g(y, z)\,. \end{aligned}$$

Wie sind dabei f und g zu definieren?

Hinweis: Benutzen Sie die Darstellung

$$M = S \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T$$

mit regulären Matrizen $S, T \in \mathbb{R}^{N,N}$.

(ii) Ist M regulär, so finden wir die zu (3) äquivalente Differentialgleichung

$$u' = M^{-1}\phi(u)\,.$$

Formulieren Sie für diese Differentialgleichung die Iteration eines Runge-Kutta-Verfahrens der Stufe s unter Verwendung des Kronecker Produktes $\otimes$. Benutzen Sie dabei die Bezeichnungen $\mathbb{I} := (1, ..., 1)^T \in \mathbb{R}^s$ und $U_n := (U_{n1}, ..., U_{ns}) \in \mathbb{R}^{Ns}$ (Spaltenvektor), U_{ni} Stufenwerte des RK-Verfahrens und $\overline{\phi}(U_n) := (\phi(U_{n1}), ..., \phi(U_{ns})) \in \mathbb{R}^{Ns}$.

Beweisen Sie die Äquivalenz des Runge-Kutta-Verfahrens zur Iteration

$$u_{n+1} = (1 - b^T A^{-1}\mathbb{I})u_n + (b^T A^{-1} \otimes I_N)U_n\,, \tag{4}$$

$$(I_s \otimes M)U_n = \mathbb{I} \otimes (Mu_n) + \Delta t(A \otimes I_N)\overline{\phi}(U_n)\,, \tag{5}$$

falls die Matrix $A \in \mathbb{R}^{s,s}$ des RK-Verfahrens invertierbar ist.

Die Iteration (4)-(5) macht auch für eine singuläre Matrix M Sinn und stellt somit ein numerisches Verfahren für (3) dar.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Wir betrachten das folgende elektrische Netzwerk:

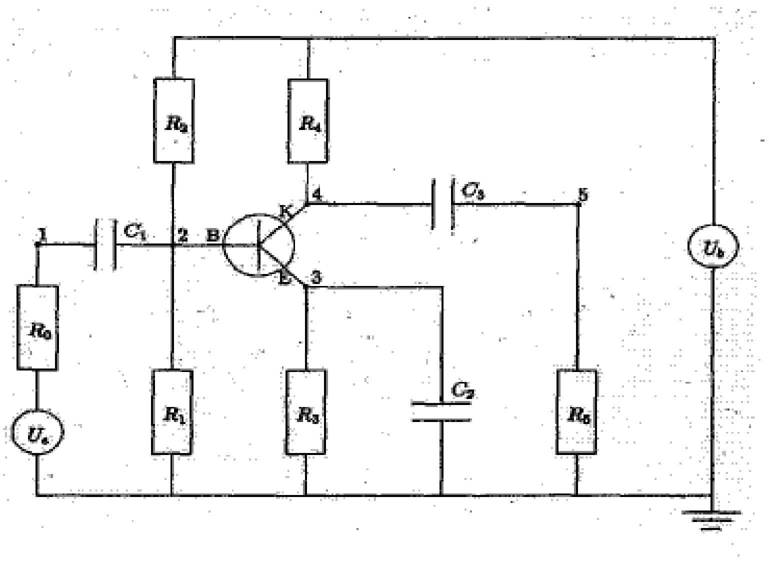

Abbildung 1: Ein Transistorverstärker

Modelliert man den Transistorverstärker mit der Kirchhoffschen Regel, so erhält man die Index 1 DAE

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{U_e(t) - U_1}{R_0} + C_1(U_2' - U_1') \\
0 &= \frac{U_b - U_2}{R_2} - \frac{U_2}{R_1} + C_1(U_1' - U_2') - 0.01g(U_2 - U_3) \\
0 &= g(U_2 - U_3) - \frac{U_3}{R_3} - C_2U_3' \\
0 &= \frac{U_b - U_4}{R_4} + C_3(U_5' - U_4') - 0.99g(U_2 - U_3) \\
0 &= -\frac{U_5}{R_5} + C_3(U_4' - U_5')
\end{aligned}
$$

mit den Unbekannten $U_1, ..., U_5$. Bestimmen Sie zunächst die Massematrix M, um die DAE in die Form

$$Mu' = f(t, u) \tag{6}$$

zu bringen. Lösen Sie das entsprechende Problem (6) mit den Anfangswerten

$$U_1(0) = 0\,, \quad U_2(0) = U_3(0) = \frac{U_b}{2}\,, \quad U_4(0) = U_b\,, \quad U_5(0) = 0$$

im Zeitintervall $[0, 0.2]$ mit `RADAU5`. Dabei ist die Operationsspannung $U_b = 6$ und die Eingangsspannung $U_\varepsilon(t) = 0.4\sin(200\pi t)$. Für die Konstanten gilt:

$$R_0 = 1000\,, \quad R_1 = ...R_5 = 9000\,, \quad C_k = k \cdot 10^{-6}\,,\ k = 1, 2, 3\,.$$

Weiter sei

$$g(U) = 10^{-6}\left(\exp\left(\frac{U}{0.026}\right) - 1\right) .$$

Plotten Sie die Eingangsspannung $U_\varepsilon(t)$ und die Ausgangsspannung $U_5(t)$ des Transistorverstärkers im Zeitintervall $[0, 0.2]$.

Abgabe per Email an `gilbert.koch@uni-konstanz.de`.