Universität Konstanz *WS 10/11*
Fachbereich Mathematik und Statistik
J. Schropp, G. Koch

Übungen zu **Differential-Algebraische Gleichungen**

http://www.math.uni-konstanz.de/~schropp/dae.html

Blatt 6 **Abgabe: 04.02.2011**

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Vorgelegt sei die DAE

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & \eta t \end{pmatrix} y' + \begin{pmatrix} 1 & \eta t \\ 0 & 1+\eta \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} q(t) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

mit $q \in C^1(\mathbb{R})$.

a) Führen Sie die Transformation

$$y = T_t \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\eta t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \tag{2}$$

für (1) durch und bestimmen sie das transformierte System.

b) Das implizite Euler-Cauchy Verfahren (IECV) für DAEs wird bestimmt indem $y'(t_n)$ durch den Differenzenquotienten

$$\frac{y(t_n) - y(t_{n-1})}{\Delta t}$$

ersetzt wird.

(i) Transformieren Sie zuerst die Gleichung (1) mit (2) und diskretisieren Sie dann die resultierende DAE mit dem IECV.

(ii) Diskretisieren Sie zuerst die Gleichung (1) und transformieren Sie dann das Verfahren mit (2) in die (u, v)-Variablen.

(iii) Welche Konvergenzordnung haben diese Verfahren und wie unterscheiden Sie sich?

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Vorgelegt sei die DAE

$$u_1' = 1\,, \qquad u_1(0) = 0\,, \tag{3}$$

$$u_2' = v\,, \qquad u_2(0) = 0\,, \tag{4}$$

$$v' = \frac{1}{2}(\exp(\lambda - 1) + 1)\,, \qquad v(0) = 0\,, \tag{5}$$

$$0 = u_2 - \frac{u_1^2}{2}\,, \qquad \lambda(0) = 1\,. \tag{6}$$

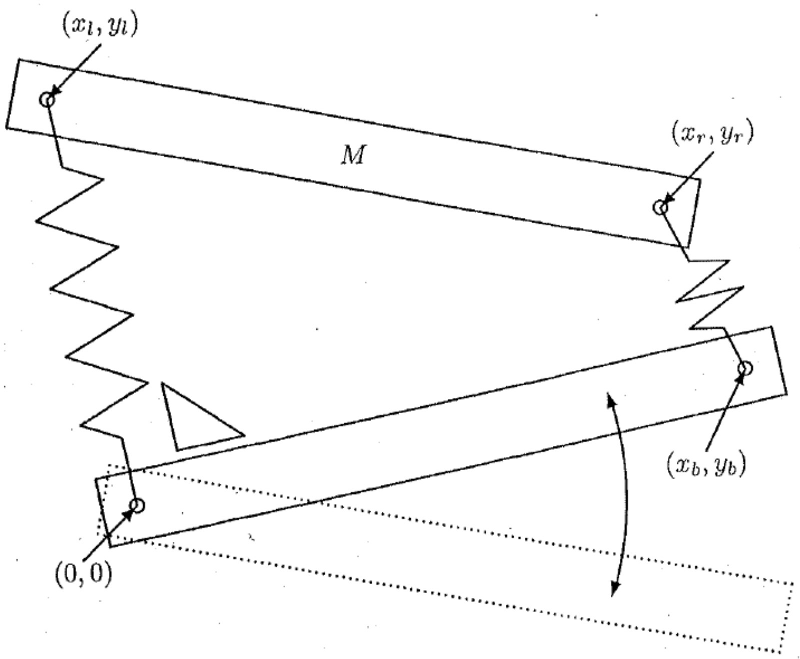
a) Bestimmen Sie den Index und die Lösung $(\overline{u}(t), \overline{v}(t), \overline{\lambda}(t))$ der DAE (3)-(6).

b) Diskretisieren Sie (3)-(6) durch das implizite Euler-Cauchy Verfahren. Zeigen Sie, dass das zur Bestimmung von $(u_1, v_1, \lambda_1) \in \mathbb{R}^{2+1+1}$ zu lösende Gleichungssystem nicht lösbar ist.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Das Autoachsen Problem

Das folgende Index 3 Problem beschreibt das Verhalten einer Autoachse auf einer holprigen Straße. Der Einfachheit halber rollt der linke Reifen im Ursprung (0,0) auf einer ebenen Oberfläche und der rechte Reifen mit den Koordinaten (x_b, y_b) läuft alle τ Sekunden über einen Hügel der Höhe h. Die Länge der Achse wird mit l beschrieben. Das Chassis des Autos wird durch den Stab $(x_l, y_l) - (x_r, y_r)$ mit der Masse M modelliert. Mit zwei Federn werden die Verbindungen zwischen Chassis und Achse modelliert. Diese Federn sind masselos und haben die Hooksche Konstante $\frac{1}{\varepsilon^2}$ und die Länge l_0 im Ruhezustand. Mit l_l und l_r werden die Länge der linken und rechten Feder bezeichnet.



Das Problem ist von der Form

$$\begin{aligned} p' &= q\,, & p(0) &= p_0\,, \\ Kq' &= f(t,p,\lambda)\,, & q(0) &= q_0\,, \\ 0 &= \phi(t,p)\,, & \lambda(0) &= \lambda_0\,, \end{aligned}$$

wobei $p, q \in \mathbb{R}^4$, $\lambda \in \mathbb{R}^2$ und $t \in [0,3]$.

Es gilt $K = \varepsilon^2 \frac{M}{2} I_4$. Die Funktion $f : \mathbb{R}^9 \to \mathbb{R}^4$ lautet

$$f(t,p,\lambda) = \begin{pmatrix} (l_0 - l_l)\frac{x_l}{l_l} + \lambda_1 x_b + 2\lambda_2(x_l - x_r) \\ (l_0 - l_l)\frac{y_l}{l_l} + \lambda_1 y_b + 2\lambda_2(y_l - y_r) - \varepsilon^2 \frac{M}{2} \\ (l_0 - l_r)\frac{x_r - x_b}{l_r} - 2\lambda_2(x_l - x_r) \\ (l_0 - l_r)\frac{y_r - y_b}{l_r} - 2\lambda_2(y_l - y_r) - \varepsilon^2 \frac{M}{2} \end{pmatrix}$$

mit $p = (x_l, y_l, x_r, y_r)^T$ und $l_l = \sqrt{x_l^2 + y_l^2}$ sowie $l_r = \sqrt{(x_r - x_b)^2 + (y_r - y_b)^2}$. Weiter ist $x_b(t) = \sqrt{l^2 - y_b^2(t)}$ und $y_b(t) = r \sin(\omega t)$. Die Funktion $\phi : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^2$ lautet

$$\phi(t,p) = \begin{pmatrix} x_l x_b + y_l y_b \\ (x_l - x_r)^2 + (y_l - y_r)^2 - l^2 \end{pmatrix} .$$

Die Konstanten lauten

$$l = 1\,, \quad l_0 = 0.5\,, \quad \varepsilon = 10^{-2}\,, \quad M = 10\,, \quad h = 0.2\,, \quad \tau = \frac{\pi}{5}\,, \quad \omega = 10\,.$$

Konsistente Anfangswerte sind

$$p_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \\ 1 \\ 0.5 \end{pmatrix}, \quad q_0 = \begin{pmatrix} -0.5 \\ 0 \\ -0.5 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_0 = (0,0)^T\,.$$

Der Index der Variablen p, q und λ sind 1,2 und 3.

Lösen Sie das Problem mit `RADAU5` und zeichnen Sie $x_l(t), y_l(t), x_r(t)$ und $y_r(t)$.

Abgabe per Email an `gilbert.koch@uni-konstanz.de`.