

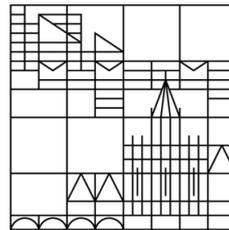
Numerik dynamischer Systeme und Verzweigungen

Prof. Dr. Johannes Schropp

Fachbereich Mathematik und Statistik

Mitschrieb von: Felix Sauer

Universität
Konstanz



Konstanz, 4. August 2023

Inhaltsverzeichnis

1	Grundtatsachen dynamischer Systeme	1
1.1	Situation	1
1.2	Limesmengen und Invarianz	2
1.3	Ein Beispiel	4
1.4	Teilchen im Potential	6
1.5	Das Lorenz System	8
2	Stabilität und Stabilitätskriterien	10
2.1	Orbitale Stabilität	10
2.2	Stabilitätskriterien für stationäre Punkte	11
2.3	Invariante Unterräume linearer Differentialgleichungen	14
2.4	Struktur-stabile Vektorfelder	15
3	Reguläre Lösungen	18
3.1	Zweige stationärer Lösungen	18
3.2	Parameterfortsetzungen bei regulären Lösungen	19
3.3	Fortsetzung nach der Bogenlänge (H. Keller)	20
3.4	Nicht-hyperbolische stationäre Punkte	22
3.5	Berechnung von Umkehrpunkten	23
3.6	Berechnung von Hopf-Punkten	27
4	Periodische Lösungen dynamischer Systeme	29
4.1	Lokale transversale Schnitte	29
4.2	Die Poincare-Abbildung	30
4.3	Monodromiematrix	32
4.4	Stabilitätsanalyse periodischer Orbits	33
5	Berechnung periodischer Lösungen	35
5.1	Skalierung der Periode und Phasenbedingung	35
5.2	Das Schießverfahren	37
5.3	Periodische Lösungen parameterabhängiger Systeme	40
6	Stabile und instabile Mannigfaltigkeiten	42
6.1	Stabile und instabile Mannigfaltigkeiten stationärer Punkte	42
6.2	Darstellung lokaler stabiler und instabiler Mannigfaltigkeiten	44
6.3	Stabile und instabile Mannigfaltigkeiten periodischer Orbits	45
7	Zentrumsmannigfaltigkeiten für dynamische Systeme und Verzweigungen	48
7.1	Die Zentrumsmannigfaltigkeit	48
7.2	Eigenschaften der Zentrumsmannigfaltigkeit	49
7.3	Verzweigungen parameterabhängiger Systeme	50
7.4	Normalformen nichthyperbolischer stationärer Punkte	51
7.5	Normalformen von Umkehr- und Hopfpunkten	52

1 Grundtatsachen dynamischer Systeme

1.1 Situation

$$x' = f(x, \lambda), \quad f : \Omega \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^N$$

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ Gebiet, $\Lambda \subset \mathbb{R}^p$ offen

Satz 1.1 (Max Ex. und Eindeutigkeit). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen, $\Lambda \subset \mathbb{R}^p$ offen und sei $f \in C^k(\Omega \times \Lambda, \mathbb{R}^N)$, $k \geq 1$. Dann besitzt die AWA $x' = f(x, \lambda)$, $x(0) = \xi$ für jedes $\xi \in \Omega$ und $\lambda \in \Lambda$ genau eine nicht-fortsetzbare Lösung $\bar{x}(t, \xi, \lambda) \in \Omega$ für $t \in J(\xi, \lambda) := (t^-(\xi, \lambda), t^+(\xi, \lambda))$

Der Definitionsbereich von \bar{x}

$$\mathcal{D}(\Lambda) = \{(t, \xi, \lambda) \in \mathbb{R} \times \Omega \times \Lambda; t \in J(\xi, \lambda)\}$$

ist offen, und es gilt $\bar{x} \in C^k(\mathcal{D}(\Lambda), \Omega)$.

$J(\xi, \lambda)$ bezeichnet das maximale Existenzintervall der Lösung von $x' = f(x, \lambda)$, $x(0) = \xi$.

Spezialfall: $x' = f(x)$, $x(0) = \xi$ (parameterunabhängig)

Es gilt $\mathcal{D} = \{(t, \xi) \in \mathbb{R} \times \Omega, t \in J(\xi) = (t^-(\xi), t^+(\xi))\}$ ist offen in $\mathbb{R} \times \Omega$, und $\bar{x} \in C^1(\mathcal{D}, \Omega)$

Definition 1.2. $\gamma(\xi) = \{\bar{x}(t, \xi); t \in J(\xi)\}$ heißt der zu ξ gehörige zu *Orbit*.

Ex. und Eind.Satz \Rightarrow Je zwei Orbits $\gamma(\xi) = \{\bar{x}(t, \xi); t \in J(\xi)\}$ und $\gamma(\eta) = \{\bar{x}(t, \eta); t \in J(\eta)\}$, $\xi, \eta \in \Omega$ sind entweder gleich oder disjunkt.

Der gesamte *Phasenraum* Ω kann als disjunkte Vereinigung aller Orbits aufgefasst werden.

Weiteres Werkzeug:

Definition 1.3. Die Zeit τ -Fluss Abbildung $\Phi_\tau : \Omega \rightarrow \Omega$,

$$\Phi_\tau : x_0 \mapsto \bar{x}(\tau, x_0)$$

Φ_τ hat die Halbgruppeneigenschaft

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= \text{id}_\Omega \\ \Phi_t \circ \Phi_s &= \Phi_{t+s} \end{aligned} \tag{*}$$

(*) gilt für alle $t, s \in \mathbb{R}$, für welche die linke Seite definiert ist.

Definition 1.4. Allgemeiner bezeichnet man eine Familie von stetigen Abb.

$$\Phi_t : \Omega \rightarrow \Omega, t \in I \subset \mathbb{R}$$

als ein lokales (globales) dynamisches System auf Ω , falls

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= \text{id}_\Omega \\ (\Phi_t \circ \Phi_s)(x) &= \Phi_{t+s}(x) \end{aligned}$$

für $s \in J(x), t \in J(\Phi_s(x)), x \in \Omega$.

Konsequenz: Dynamische Systeme $x' = f(x), f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ erzeugen via $\Phi_t(x) = \bar{x}(t, x)$ lokale bzw. globale Flüsse.

1.2 Limesmengen und Invarianz

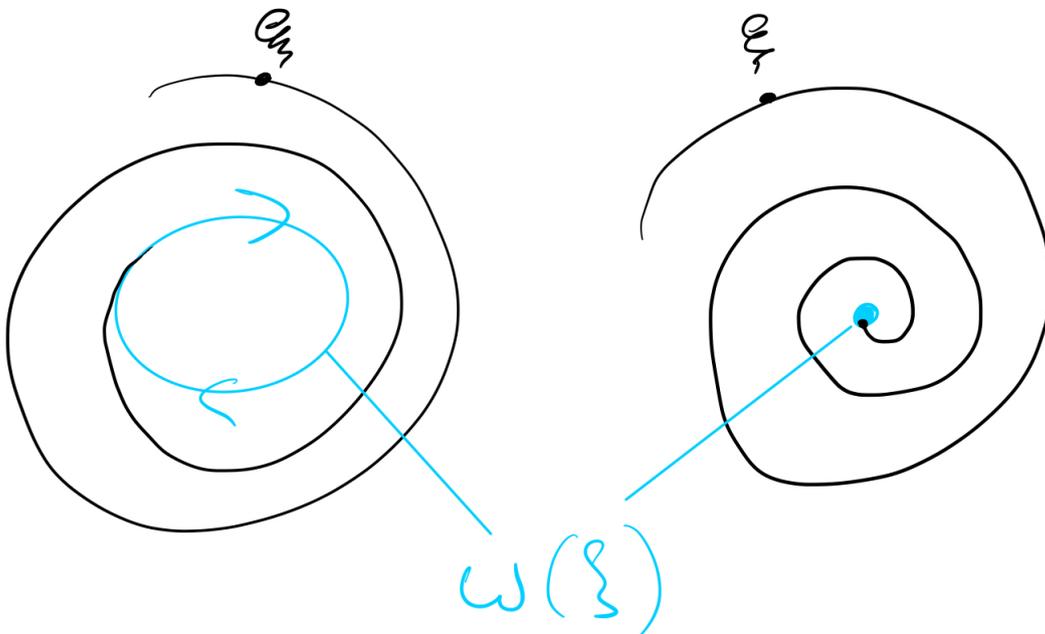
Betrachte wieder $x' = f(x), x(0) = \xi \in \Omega$ und nehme an, dass die Lösung $\bar{x}(t, \xi)$ für $t \geq 0$ existiert, d.h. $[0, \infty) \subset J(\xi)$. Dann nennt man

$$\omega(\xi) := \{x \in \Omega; \exists (t_n)_{n \in \mathbb{N}}, t_n \rightarrow \infty \text{ mit } \bar{x}(t_n, \xi) \rightarrow x \text{ für } n \rightarrow \infty\}$$

die ω -Limesmenge von ξ .

Beispiel 1.5. Beispiele für ω -Limesmengen:

- i) Es gelte $\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{x}(t, \xi) = w$. Dann gilt $\omega(\xi) = \{w\}$.
- ii) $\bar{x}(t, \xi)$ konvergiert gegen einen periodischen Orbit $\gamma(w)$. Dann findet man $\omega(\xi) = \{\bar{x}(t, w); t \in \mathbb{R}\}$.



$\omega(\xi)$ charakterisiert also das Langzeitverhalten des bei ξ gestarteten Orbits.

Definition 1.6. Analog für $(-\infty, 0] \subset J(\xi)$:

$$\alpha(\xi) := \{x \in \Omega : \exists (t_n)_{n \in \mathbb{N}}, t_n \rightarrow -\infty \text{ mit } \bar{x}(t_n, \xi) \rightarrow x \text{ für } n \rightarrow \infty\}$$

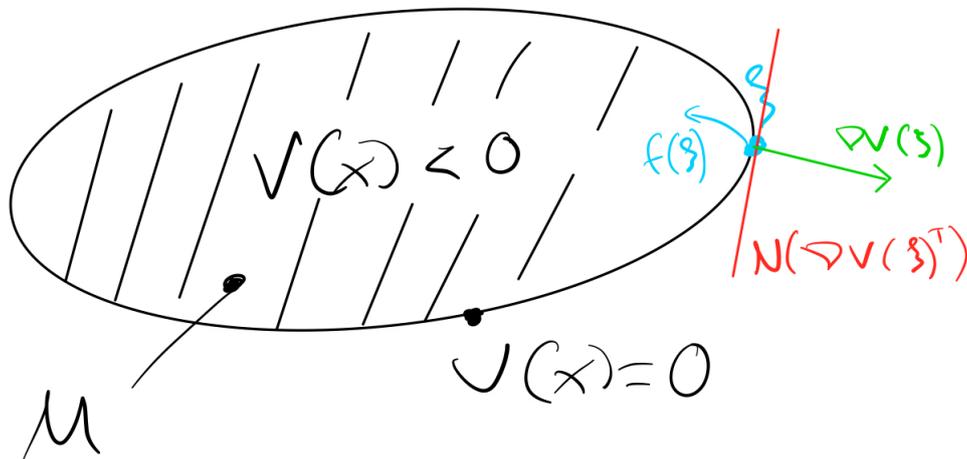
nennt man die α -Limesmenge.

Definition 1.7. Eine Menge $M \subset \Omega$ heißt *positiv (negativ) invariant*, falls die Lösung $\bar{x}(t, x) \in M$ für alle $x \in M$ und $t \in J(x)$ mit $t \geq 0$ ($t \leq 0$) gilt. $M \subset \Omega$ heißt *invariant*, falls M pos. und neg. invariant ist.

Lemma 1.8. Ist $M \subset \Omega$ kompakt und pos. (neg.) invariant für $x' = f(x)$, so gilt $[0, \infty) \subset J(x)$ ($(-\infty, 0] \subset J(x)$) für $x \in M$.

Invarianzkriterien sind nützlich zum Verständnis der Gesamtdynamik.

Invarianzkriterium: Sei $M := \{x \in \Omega; V(x) \leq 0\}$ mit $V \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$, d.h. M ist Niveaumenge.



Damit der Fluss $\bar{x}(t\xi)$ nach M hineinfließt, ist es erforderlich, dass $f(\xi), \xi \in \partial M$ nach M hinein oder wenigstens in tangentialer Richtung zeigt. Dies bedeutet

$$\langle \nabla V(\xi), f(\xi) \rangle \leq 0 \quad \forall \xi \in \partial M = V^{-1}(0)$$

Satz 1.9 (Invarianzkriterium). Sei $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ und sei $V \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$ gegeben mit $\nabla V(x) \neq 0$, falls $V(x) = 0, x \in \Omega$. Dann ist $M := \{x \in \Omega : V(x) \leq 0\}$ genau dann positiv invariant, wenn

$$\langle \nabla V(\xi), f(\xi) \rangle \leq 0, \quad \text{für } \xi \in V^{-1}(0).$$

1.3 Ein Beispiel

Beispiel 1.10.

$$\begin{aligned}x_1' &= -x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2 - \lambda), & x_1(0) &= x_1^0, \\x_2' &= x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2 - \lambda), & x_2(0) &= x_2^0,\end{aligned}$$

ist ein zweidimensionales nichtlineares DGL-System mit Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$. Dieses System hat den stationären Punkt

$$(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = (0, 0), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Für weitere Lösungen wählen wir einen Polarkoordinaten-Ansatz:

$$x_1 = r \cos(\varphi), \quad x_2 = r \sin(\varphi).$$

Man erhält dann die in r und φ neue DGL

$$\begin{aligned}r' &= r(\lambda - r^2) \\ \varphi' &= 1.\end{aligned}$$

Für den Startvektor $(x_1^0, x_2^0) = r_0(\cos(\varphi_0), \sin(\varphi_0))$ mit $r_0 > 0$ und $0 \leq \varphi < 2\pi$ ergibt sich durch Trennung der Veränderlichen die Lösung

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= \varphi_0 + t, \quad t \geq 0 & (1.1) \\ r(t) &= \begin{cases} \sqrt{\frac{\lambda}{1 + \left(\frac{\lambda}{r_0^2} - 1\right) \exp(-2\lambda t)}} & , \lambda \neq 0 \\ \frac{r_0}{\sqrt{1 + 2tr_0^2}} & , \lambda = 0 \end{cases} & t \geq 0 \end{cases} \quad (1)$$

mit $r_0^2 = (x_1^0)^2 + (x_2^0)^2$. Insbesondere gilt $J(x_1^0, x_2^0, \lambda) \supset [0, \infty)$.

Betrachten wir nun den Nennerterm im Fall $\lambda \neq 0$ für das Langzeitverhalten:

$$\begin{aligned}1 + \left(\frac{1}{r_0^2} - 1\right) \exp(-2\lambda t) \\ = \underbrace{1 - \exp(-2\lambda t)}_{\substack{>0 \text{ für } \lambda > 0 \\ <0 \text{ für } \lambda < 0}} + \underbrace{\frac{\lambda}{r_0^2} \exp(-2\lambda t)}_{\substack{>0 \text{ für } \lambda > 0 \\ <0 \text{ für } \lambda < 0}} \quad \begin{cases} > 0 \text{ für } \lambda > 0 \\ < 0 \text{ für } \lambda < 0 \end{cases}\end{aligned}$$

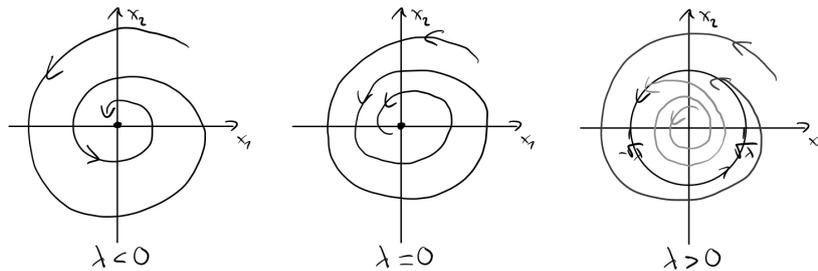
Außerdem lässt sich aus (1) das Verhalten von $r(t)$ für $t \rightarrow \infty$ im nichttrivialen Fall $r_0 > 0$ ablesen. Es gilt

$$r(t) \longrightarrow \begin{cases} 0 & \text{für } \lambda \leq 0 \\ \sqrt{\lambda} & \text{für } \lambda > 0 \end{cases}$$

Im Fall $r_0 = 0$, d.g. $x_1^0 = x_2^0$ gilt natürlich $r(t) \equiv 0 \forall t \in \mathbb{R}$.

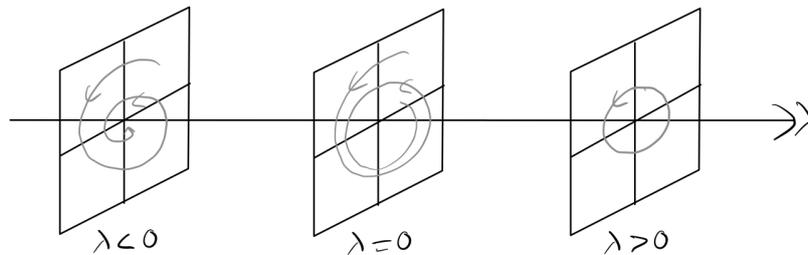
1 Grundtatsachen dynamischer Systeme

Dies liefert uns folgende Phasenbilder in der (x_1, x_2) -Ebene.



Die spezielle Lösung $\bar{x}(t, \sqrt{\lambda}, 0) = \sqrt{\lambda}(\cos(t), \sin(t))$ ist periodisch mit der Periode $T = 2\pi$. Der dazugehörige Orbit ist eine geschlossene Kurve, nämlich der Kreis mit Radius $\sqrt{\lambda}$. Für $\lambda \leq 0$ existiert zunächst nur ein stationärer Punkt, auf den alle Lösungen zustreben. Für $\lambda > 0$ entstehen aus diesem Punkt heraus periodische Orbits, die nunmehr alle anderen Orbits (außer den stationären Orbit) anziehen. Solch ein Phänomen heißt *Verzweigungspunkt* (genauer *Hopf-Verzweigung*).

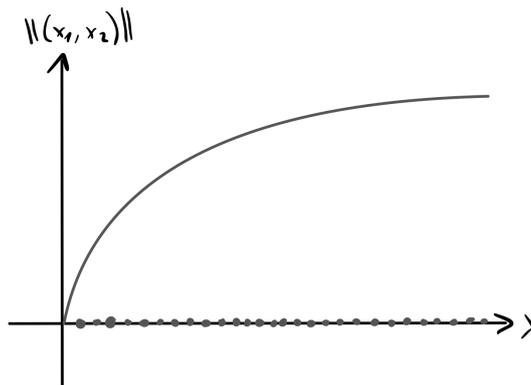
Verzweigungsdiagramm im $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$:



Lösungszweig stationärer Punkte immer $(0, 0, \lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Knapper: 2D Bild::

- stabil \equiv durchgezogen,
- instabil \equiv gestrichelt



Die Kreation eines Orbits bei Variation von λ heißt *Hopf-Verzweigung*.

1.4 Teilchen im Potential

Betrachte die Bahn $y(t) \in \mathbb{R}$ eines Teilchens, das sich in einem eindimensionalen Potential $P(y)$, $y \in \mathbb{R}$ bewegt. Nimmt man seine Masse zu 1 an, so lautet die Bewegungsgleichung

$$y'' = F(y) = -P'(y),$$

wobei $F(y) = -P'(y)$ die am Ort y auf das Teilchen wirkende Kraft ist. Setze $x_1 = y$ und $x_2 = y'$ und erhalte

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} x_2 \\ F(x_1) \end{pmatrix} =: f(x_1, x_2)$$

Die stationären Punkte (\bar{x}_1, \bar{x}_2) sind von der Form $\bar{x}_2 = 0, F(\bar{x}_1) = 0$.

Typische Beispiele:

- $P_1(x_1) = \frac{1}{2}x_1^2$, $F_1(x_1) = -P_1'(x_1) = -x_1$ "*harmonischer Oszillator*"
- $P_2(x_1) = \frac{1}{4}x_1^4 - \frac{1}{2}x_1^2$, $F_2(x_1) = -x_1^3 + x_1$ "*Duffing Oszillator*"

⇒ Diese Systeme sind Hamiltonsysteme mit

$$H(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_2^2 + P_i(x_1), \quad i = 1, 2.$$

Beachte:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial H}{\partial x_1}(x_1, x_2) &= -P'(x_1) = F(x_1) = f_2(x_1, x_2) \\ \frac{\partial H}{\partial x_2}(x_1, x_2) &= x_2 = f_1(x_1, x_2) \end{aligned}$$

Offensichtlich gilt für jede Lösung $\bar{x}(t)$:

$$\frac{d}{dt}H(\bar{x}(t)) = \frac{\partial H}{\partial x_1}(\bar{x}(t)) \cdot f_1(\bar{x}(t)) + \frac{\partial H}{\partial x_2}(\bar{x}(t)) \cdot f_2(\bar{x}(t)) = 0$$

für alle $t \in J(\bar{x}(0))$.

1 Grundtatsachen dynamischer Systeme

Situation: $x' = f(x)$, $x(0) = \xi$, Lösung $\bar{x}(t, \xi)$, $t \in J(\xi)$.

Definition 1.11. Sei $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen. Eine Funktion $V \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ mit der Eigenschaft

$$V(\bar{x}(t, x)) = V(x) \quad \forall x \in \Omega, t \in J(x)$$

heißt *Erhaltungsgröße* des Systems $x' = f(x)$.

Satz 1.12. $V \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ ist Erhaltungsgröße für $x' = f(x)$, $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$, $\Omega \in \mathbb{R}^N$ offen, genau dann, wenn

$$\langle \nabla V(x), f(x) \rangle = 0 \quad \forall x \in \Omega.$$

Beweis:

„ \Rightarrow “ Sei V eine Erhaltungsgröße, so gilt

$$\langle \nabla V(x), f(x) \rangle = 0 \quad \forall x \in \Omega, t \in J(x)$$

Differentiation liefert für $x \in \Omega$ beliebig

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} V(\bar{x}(t, x)) \right|_{t=0} &= \left. \frac{d}{dt} V(x) \right|_{t=0} = 0 \\ \left. \langle \nabla V(\bar{x}(t, x)), f(\bar{x}(t, x)) \rangle \right|_{t=0} &= \langle \nabla V(x), f(x) \rangle. \end{aligned}$$

„ \Leftarrow “ Mit $\langle \nabla V(x), f(x) \rangle = 0$, $x \in \Omega$ folgt

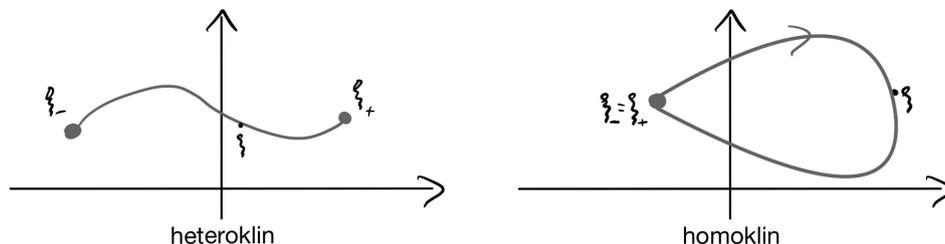
$$\begin{aligned} \langle \nabla V(\bar{x}(t, x)), f(\bar{x}(t, x)) \rangle &= 0 \\ \frac{d}{dt} V(\bar{x}(t, x)) &= 0 \\ \Rightarrow V(\bar{x}(t, x)) &= V(x), \quad x \in \Omega, t \in J(x) \end{aligned}$$

□

Definition 1.13. Sei $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen, und sei $\xi \in \mathbb{R}$ mit $J(\xi) = \mathbb{R}$. Ferner mögen die Grenzwerte $\xi_+ = \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{x}(t, \xi)$ und $\xi_- = \lim_{t \rightarrow -\infty} \bar{x}(t, \xi)$ existieren und in Ω liegen. Dann heißt der Orbit

$$\gamma(\xi) = \{\bar{x}(t, \xi) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

Verbindungsorbit von ξ_- nach ξ_+ . Er heißt *homoklin*, falls $\xi_- = \xi_+$ und *heteroklin*, falls $\xi_- \neq \xi_+$.



Es lässt sich zeigen, dass die Endpunkte ξ_- und ξ_+ selbst stationäre Punkte sind und nicht zum Orbit $\gamma(\xi)$ gehören. Es gilt $\omega(\xi) = \{\xi_+\}$, $\alpha(\xi) = \{\xi_-\}$.

1.5 Das Lorenz System

Betrachte das System

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \sigma(y - z) \\ rx - y - xz \\ xy - bz \end{pmatrix} := f(x, y, z, r, \sigma, b), \quad r, \sigma, b > 0.$$

Dieses System weist je nach Wahl der Parameter r, σ und b sehr einfaches oder sehr komplexes Langzeitverhalten auf.

Für die stationären Punkte gilt $f(x, y, z, r, \sigma, b) = 0$.

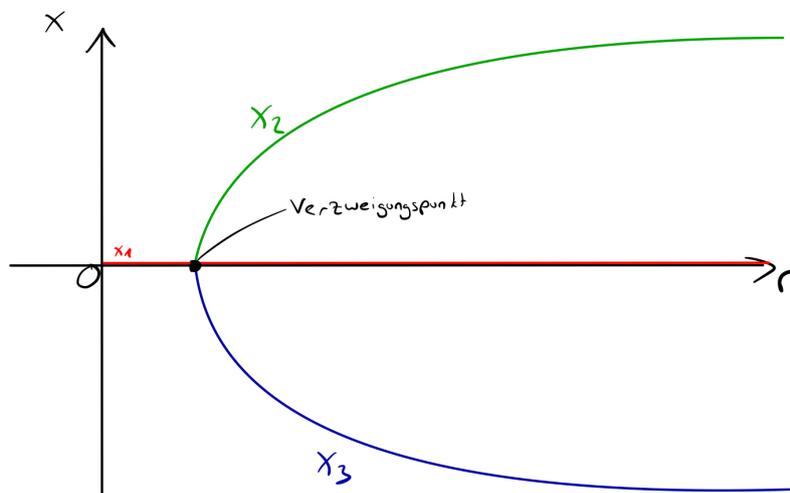
$$x = y \Rightarrow rx - x - xz = (r - 1 - z) = 0 \quad \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 0 \\ x \neq 0, z = r - 1, r \geq 1 \end{cases}$$

$$xy - bz = x^2 - b(r - 1) = 0, \quad x = y = \pm\sqrt{b(r - 1)}, \quad r \geq 1$$

Dies liefert uns die Zweige

- $(x_1, y_1, z_1) = (0, 0, 0), r > 0$
- $(x_2, y_2, z_2) = (\sqrt{b(r - 1)}, \sqrt{b(r - 1)}, r - 1), r \geq 1$
- $(x_3, y_3, z_3) = (-\sqrt{b(r - 1)}, -\sqrt{b(r - 1)}, r - 1), r \geq 1$

Verzweigungsdiagramm (stationäre Lösungen):



Man setzt meistens $\sigma = 10, b = \frac{8}{3}$ und berechnet Phasenbilder für $r \geq 0$, z.B. $r = \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{stationär}}, 10, \underbrace{28}_{\text{chaotisch}}, \underbrace{250}_{\text{periodisch}}$. Für $r = 28$ erhält man Orbits, welche weder stationär noch

1 Grundtatsachen dynamischer Systeme

periodisch werden. Nach Annäherung an eine kompakte Menge verläuft die Bewegung irregulär oder chaotisch. Man spricht von einem seltsamen Attraktor.

Mit Hilfe von Satz 1.9 lässt sich immerhin zeigen, dass mit

$$V(x, y, z) := rx^2 + \sigma y^2 + \sigma(z - 2r)^2$$

die Rotationsellipse

$$E_c := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; V(x, y, z)c \leq 0\}$$

für $c > 0$ hinreichend groß positiv invariant sind.

Beweis: Finde

$$\nabla V = \begin{pmatrix} 2rx \\ 2\sigma y \\ 2\sigma(z - 2r) \end{pmatrix}$$

und somit

$$\begin{aligned} \langle \nabla V(x, y, z), f(x, y, z) \rangle &= 2rx\sigma(y - x) + 2\sigma y(rx - y - xz) + 2\sigma(z - 2r)(xy - bz) \\ &= \dots \\ &= -2\sigma (rx^2 + y^2 + bz(z - 2r)). \end{aligned}$$

Weiter gilt

$$-bz(z - 2r) \leq -\frac{b}{2}(z - 2r)^2 + 2br^2$$

Dies liefert

$$\begin{aligned} \langle \nabla V(x, y, z), f(x, y, z) \rangle &\leq -2\sigma \left(rx^2 + y^2 + \frac{b}{2}(z - 2r)^2 - 2br^2 \right) \\ &\leq -2\sigma \left(rx^2 + y^2 + \frac{b}{2}(z - 2r)^2 \right) + 4b\sigma r^2 \\ &\leq -2\sigma \min \left(1, \frac{1}{\sigma}, \frac{b}{2\sigma} \right) (rx^2 + \sigma y^2 + \sigma(z - 2r)^2) + 4b\sigma r^2. \end{aligned}$$

Mit $V(x, y, z) = c$ erhalten wir dann

$$\begin{aligned} \langle \nabla V(x, y, z), f(x, y, z) \rangle &\leq -2\sigma \min \left(1, \frac{1}{\sigma}, \frac{b}{2\sigma} \right) c + 4b\sigma r^2 \\ &\leq 0, \end{aligned}$$

falls

$$c \geq c_0 := \frac{4b\sigma r^2}{\min(2\sigma, 2, b)}.$$

□

2 Stabilität und Stabilitätskriterien

2.1 Orbitale Stabilität

Vorgelegt sei das System

$$x' = f(x), \quad f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N), \quad \Omega \subset \mathbb{R}^N$$

mit Lösung $\bar{x} = \bar{x}(t, \xi)$. Sei $M \subset \Omega$ abgeschlossen und

$$\text{dist}(x, M) := \inf\{\|x - y\| : y \in M\}, \quad x \in \Omega$$

sei die Distanzfunktion.

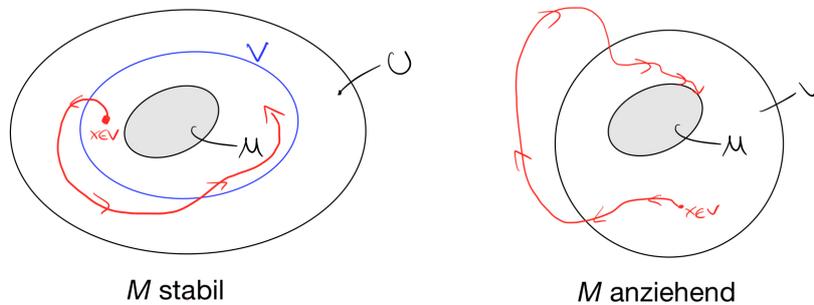
Definition 2.1. $M \subset \Omega$ abgeschlossen heißt *orbital*

- *stabil* für $x' = f(x)$, falls es zu jeder Umgebung U von M in Ω eine Umgebung V von M gibt, so dass $\bar{x}(t, x)$ für alle $x \in V$ für $t \geq 0$ existiert und in U liegt.
- *anziehend* für $x' = f(x)$, falls es eine Umgebung V von M in Ω gibt, so dass $\bar{x}(t, x)$ für alle $x \in V$ für $t \geq 0$ existiert und

$$\text{dist}(\bar{x}(t, x), M) \rightarrow 0 \quad \text{für } t \rightarrow \infty$$

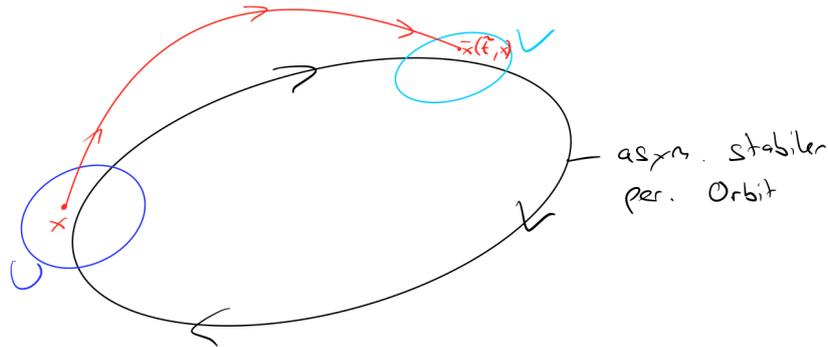
enthält.

- *asymptotisch stabil* für $x' = f(x)$, falls M stabil und anziehend ist.
- *instabil* für $x' = f(x)$, falls M nicht stabil ist.



Von einem Attraktor eines dynamischen Systems erwartet man über die asymptotische Stabilität hinaus noch eine gewisse Minimalität. Er soll sich nicht in kleinere asymptotisch stabile Mengen zerlegen lassen, z.B. wollen wir nicht eine Menge aus zwei asymptotisch stabilen Punkte als Attraktor bezeichnen. Eine mögliche Definition ist die Folgende:

Definition 2.2. Eine kompakte, invariante, asymptotisch stabile Menge $M \subset \Omega$ von $x' = f(x)$ heißt *Attraktor*, falls sie topologisch transitiv ist, d.h. zu je zwei offenen Mengen $U, V \subset \Omega$ mit $U' := U \cap M \neq \emptyset$, $V' = V \cap M \neq \emptyset$ gibt es ein $t \geq 0$ und ein $x \in U'$ mit $\bar{x}(t, x) \in V'$.



Bemerkung 2.3. • Asymptotisch stabile stationäre Punkte und periodische Orbits sind offensichtlich auch immer Attraktoren.

- Ein Attraktor M kann keinen echten Unterattraktor $M_0 \subset M$, $M_0 \neq M$ enthalten.

2.2 Stabilitätskriterien für stationäre Punkte

Wir behandeln Stabilitätskriterien für stationäre Punkte, welche sich auf Linearisierungen stützen. Vorgelegt sei

$$x' = f(x), \quad f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N), \quad \Omega \subset \mathbb{R}^N \text{ offen.}$$

Es sei $\gamma(\xi) = \{\bar{x}(t, \xi); t \in J(\xi)\}$, $J(\xi) = \mathbb{R}$ ein ausgezeichneteter Orbit.

Betrachte jetzt eine in der Nähe von ξ gestartete Lösung $\bar{x}(t, x)$, $J(x) \supset \mathbb{R}_+$.

Setze $z(t) = \bar{x}(t, x) - \bar{x}(t, \xi)$ und finde

$$\begin{aligned} z'(t) &= \bar{x}'(t, x) - \bar{x}'(t, \xi) \\ &= f(\bar{x}(t, x)) - f(\bar{x}(t, \xi)) \\ &= f(\bar{x}(t, \xi)) + f'(\bar{x}(t, \xi))(\bar{x}(t, x) - \bar{x}(t, \xi)) + \mathcal{O}(\|\bar{x}(t, x) - \bar{x}(t, \xi)\|^2) - f(\bar{x}(t, \xi)) \\ &= f'(\bar{x}(t, \xi))z(t) + \mathcal{O}(\|z(t)\|^2). \end{aligned}$$

Sei nun $f(\xi) = 0$, d.h. ξ ein stationärer Punkt. Dann gilt

$$z(t) = \bar{x}(t, x) - \xi$$

sowie

$$z'(t) = f'(\xi)z(t) + \mathcal{O}(\|z(t)\|^2)$$

für den Abstand $z(t)$.

Vermutung: Die Stabilität von ξ wird anhand der Stabilität des linearisierten Systems

$$z'(t) = f'(\xi)z(t), \quad z(0) = z_0 = x - \xi$$

mit Lösung

$$z(t) = \exp(f'(\xi)t)z_0$$

entschieden.

2 Stabilität und Stabilitätskriterien

Satz 2.4 (Satz von Lyapunov). Ein stationärer Punkt ξ von $x' = f(x)$, $f \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^N)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen ist

- asymptotisch stabil, falls $\operatorname{Re}(\mu) < 0$ für alle Eigenwerte μ von $f'(\xi)$.
- instabil, falls $\operatorname{Re}(\mu) > 0$ für mindestens einen Eigenwert μ von $f'(\xi)$.

Beispiel 2.5. Das System

$$\begin{aligned} x_1' &= -x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2 - \lambda) =: f_1(x_1, x_2, \lambda) \\ x_2' &= x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2 - \lambda) =: f_2(x_1, x_2, \lambda). \end{aligned}$$

liefert die stationäre Lösung $\bar{x}_\lambda = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \lambda) = (0, 0, \lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Man findet

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0, \lambda) = \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \text{Eigenwerte } \lambda \pm i, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Der Satz von Lyapunov liefert

- $(0, 0, \lambda)$ stabil für $\lambda < 0$,
- $(0, 0, \lambda)$ instabil für $\lambda > 0$,
- keine Aussage für $\lambda = 0$.

Beispiel 2.6 (Teilchen im Potential).

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} x_2 \\ -P'(x_1) \end{pmatrix} =: f(x_1, x_2)$$

$P = P(x_1)$ Potential.

Stationäre Punkte $(\bar{x}_1, 0)$ mit $P'(\bar{x}_1) = 0$.

Man findet

$$f'(\bar{x}_1, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -P''(\bar{x}_1) & 0 \end{pmatrix}$$

mit Eigenwerten

$$\lambda_{1,2} = \begin{cases} \pm i\sqrt{P''(\bar{x}_1)}, & \text{falls } P''(\bar{x}_1) > 0, \quad \rightarrow \text{keine Aussage} \\ \pm\sqrt{-P''(\bar{x}_1)}, & \text{falls } P''(\bar{x}_1) < 0 \quad \rightarrow \bar{x}_1 \text{ instabil.} \end{cases}$$

Beispiel 2.7 (Lorenz System).

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \sigma(y - z) \\ rx - y - xz \\ xy - bz \end{pmatrix} := f(x, y, z, r, \sigma, b), \quad r, \sigma, b > 0.$$

2 Stabilität und Stabilitätskriterien

- Wir haben die stationäre Lösung $(\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1) = (0, 0, 0)$

$$f'(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix}$$

$$\lambda_3 = -b, \quad \lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(-1 - \sigma \pm \sqrt{(1 + \sigma)^2 - 4\sigma(1 - r)} \right)$$

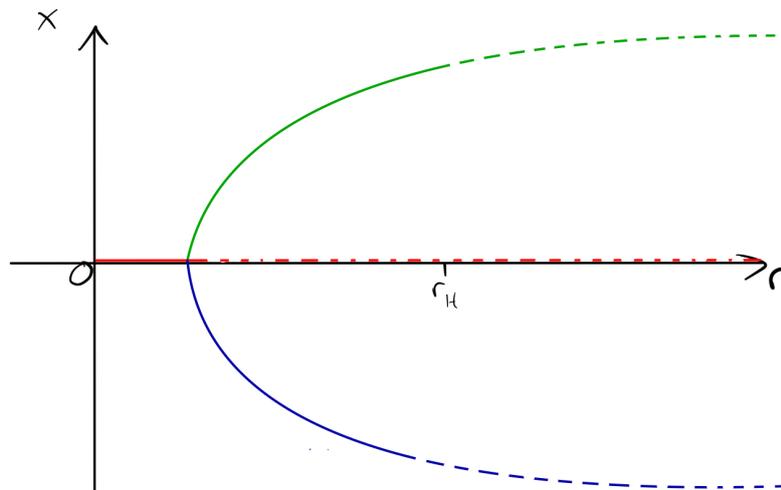
↔ Stabilität für $0 \leq r < 1$, Instabilität für $r > 1$.

-

$$(\bar{x}_{2,3}, \bar{y}_{2,3}, \bar{z}_{2,3}) = \left(\pm\sqrt{b(r-1)}, \pm\sqrt{b(r-1)}, r-1 \right), \quad r \geq 1$$

$$f'(\bar{x}_{2,3}, \bar{y}_{2,3}, \bar{z}_{2,3}) = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ 1 & -1 & \pm\sqrt{b(r-1)} \\ \pm\sqrt{b(r-1)} & \pm\sqrt{b(r-1)} & -b \end{pmatrix}$$

Man kann zeigen (Routh-Hurwitz-Kriterium): Die stationären Zustände $(\bar{x}_{2,3}, \bar{y}_{2,3}, \bar{z}_{2,3})$ sind stabil für $1 < r < r_h$ mit $r_h := \frac{\sigma(\sigma+b+3)}{\sigma-b-1}$, falls $\sigma > b + 1$. Für $r > r_h$ hat $f'(\bar{x}_{2,3}, \bar{y}_{2,3}, \bar{z}_{2,3})$ zwei Eigenwerte mit positivem Realteil. Mit klassischen Parametern $\sigma = 10, b = \frac{8}{3}$ ist $r_H = 24.78$.



2.3 Invariante Unterräume linearer Differentialgleichungen

Wir schauen uns den linearen Fall

$$x' = Bx = f'(\xi)x, \quad B \in \mathbb{R}^{N \times N}$$

mit stationärem Punkt 0 genauer an. Mit der reellen Jordan-Normalform erhält man

$$S^{-1}BS = J = \text{diag}(J_1, \dots, J_k), \quad S \in \mathbb{R}^{N \times N}$$

invertierbar mit

$$J_i = \begin{pmatrix} \mu_i & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \mu_i \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N_i \times N_i}$$

für reelle Eigenwerte $\mu_i \in \sigma(B)$ und

$$J_i = \begin{pmatrix} \Lambda_i & I_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & I_2 \\ & & & \Lambda_i \end{pmatrix}, \quad \Lambda_i = \begin{pmatrix} \text{Re}(\mu_i) & -\text{Im}(\mu_i) \\ \text{Im}(\mu_i) & \text{Re}(\mu_i) \end{pmatrix}$$

für komplexe Eigenwerte $\mu_i \in \sigma(B) \setminus \mathbb{R}$. Außerdem können wir μ_i so anordnen, das gilt

$$\text{Re}(\mu_i) \begin{cases} < 0 & \text{für } i = 1, \dots, k_s & s : \text{stabil} \\ = 0 & \text{für } i = k_s+1, \dots, k_s + k_c & c : \text{zentral} \\ > 0 & \text{für } i = k_s + k_c + 1, \dots, k_s + k_c + k_u = k & u : \text{instabil} \end{cases}$$

Entsprechend dieser Einteilung der Eigenwerte fassen wir die Diagonalblöcke von J und die Spalten von S zusammen

$$J_s = \text{diag}(J_1, \dots, J_s) \in \mathbb{R}^{N_s \times N_s}, \quad N_s = \sum_{i=1}^{k_s} N_i,$$

$$J_c = \text{diag}(J_{k_s+1}, \dots, J_{k_s+k_c}) \in \mathbb{R}^{N_c \times N_c}, \quad N_c = \sum_{i=k_s+1}^{k_s+k_c} N_i,$$

$$J_u = \text{diag}(J_{k_s+k_c+1}, \dots, J_{k_s+k_c+k_u}) \in \mathbb{R}^{N_u \times N_u}, \quad N_u = \sum_{i=k_s+k_c+1}^{k_s+k_c+k_u} N_i$$

$S = (S_s, S_c, S_u)$ mit $S_s \in \mathbb{R}^{N \times N_s}$, $S_c \in \mathbb{R}^{N \times N_c}$, $S_u \in \mathbb{R}^{N \times N_u}$, $N_s + N_c + N_u = N$. Entsprechend gilt $J = \text{diag}(J_s, J_c, J_u)$.

Die Gleichung $BS = SJ$ können wir schreiben als

$$BS_\kappa = S_\kappa J_\kappa, \quad \kappa \in \{s, c, u\}$$

2 Stabilität und Stabilitätskriterien

Setze $X_\kappa := S_\kappa \mathbb{R}^{N_\kappa}$, $\kappa \in \{s, c, u\}$. Dann ist X_s stabiler Unterraum, X_c zentraler Unterraum, X_u instabiler Unterraum mit $X_s \oplus X_c \oplus X_u = \mathbb{R}^N$.

Aus $BS_\kappa = S_\kappa J_\kappa$ folgt

$$\exp(B)S_\kappa = S_\kappa \exp(J_\kappa)$$

sowie

$$\exp(tB)S_\kappa y = S_\kappa \exp(tJ_\kappa)y, \quad \text{für } t \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^N$$

d.h. die Unterräume X_κ sind invariant für den Fluss $\Psi(t, z) = \exp(tB)z$ des linearen Systems $x' = Bx$. Nun lässt sich zeigen: Es existiert eine Norm $\|\cdot\|$ auf \mathbb{R}^N , $\alpha, \beta > 0$ mit

$$\|\exp(tB)z\| \leq K \exp(-\beta t) \quad \text{für } t \geq 0, \forall z \in X_s$$

$$\|\exp(tB)z\| \leq L \exp(\alpha t) \quad \text{für } t \leq 0, \forall z \in X_u.$$

Definition 2.8. Für $x' = Bx$, $B \in \mathbb{R}^{N \times N}$ heißen X_s, X_c und X_u *stabiler, zentraler* und *instabiler* Unterraum. Entsprechend heißen $\sigma_s(B) := \sigma(J_s)$, $\sigma_c(B) = \sigma(J_c)$, $\sigma_u(B) := \sigma(J_u)$ *stabiles, zentrales* und *instabiles Spektrum* von B . Die Matrix B heißt *hyperbolisch*, falls $X_c = \{0\}$, d.h. falls B keine Eigenwerte μ mit $\operatorname{Re}(\mu) = 0$ besitzt.

Bemerkung 2.9. ξ mit $f(\xi) = 0$ heißt *hyperbolischer stationärer Punkt*, falls $X_c = \{0\}$.

2.4 Struktur-stabile Vektorfelder

Definition 2.10. Seien $\Phi(t, x)$, $\Psi(t, y)$ Flüsse auf U bzw. V mit $U, V \subset \mathbb{R}^N$ offen (z.B. erzeugt durch $x' = f(x)$, $x \in U$ und $y' = g(y)$, $y \in V$). Dann heißen Φ und Ψ (genauer Φ auf U und Ψ auf V) *topologisch äquivalent*, falls es ein $\alpha > 0$ und einen Homöomorphismus $H : U \rightarrow V$ gibt mit

$$H(\Phi(t, x)) = \Psi(\alpha t, H(x)) \quad \forall (t, x) \text{ mit } \Phi(t, x) \in U.$$

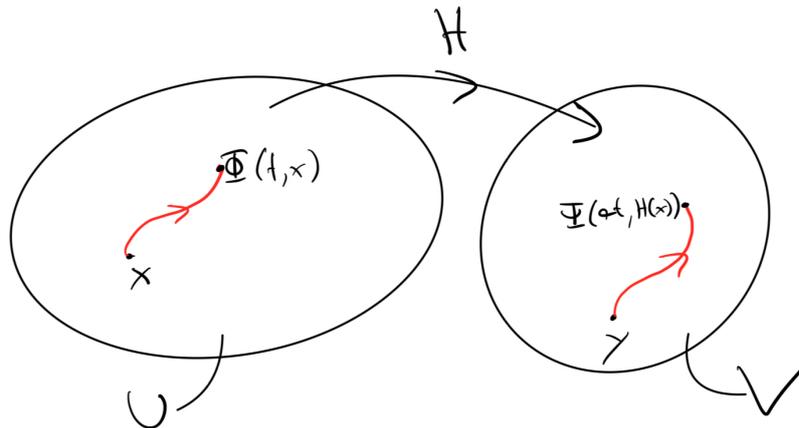
Gilt überdies $\alpha = 1$, so heißen Φ und Ψ *isochron topologisch äquivalent* oder *topologisch konjugiert*.

Bemerkung 2.11. a) Das folgende Diagramm kommutiert

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{D}_\Phi & \xrightarrow{\Phi} & U \\
 \alpha \times H \downarrow & & \downarrow H \\
 \mathcal{D}_\Psi & \xrightarrow{\Psi} & V
 \end{array}$$

$$(\alpha \times H)(t, x) = (\alpha t, H(x))$$

b) Der Homöomorphismus $H : U \rightarrow V$ bildet Orbits auf Orbits ab.



Insbesondere bildet H stationäre Punkte auf stationäre Punkte und periodische Orbits auf periodische Orbits ab. Beachte dazu: $\Phi(t, \tilde{x}) = \tilde{x}$, $t \in \mathbb{R}$ impliziert $\Psi(t, H(\tilde{x})) = H(\tilde{x})$, $t \in \mathbb{R}$, d.h. $\Psi(t, \tilde{y}) = \tilde{y}$, $t \in \mathbb{R}$, und umgekehrt.

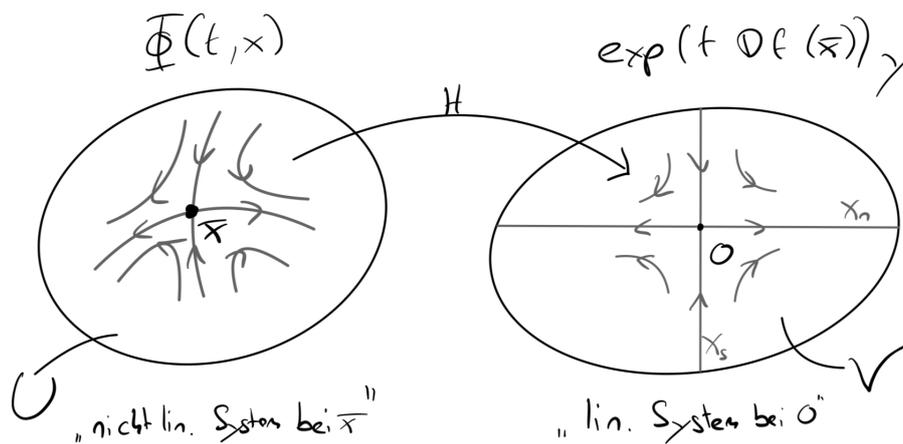
- c) Werden Φ und Ψ durch $x' = f(x)$ bzw. $y' = g(y)$ erzeugt, so heißen $x' = f(x)$ auf U und $y' = g(y)$ auf V topologisch äquivalent.

Genauere Information über das Phasenportrait nichtlinearer Differentialgleichungen $x' = f(x)$ in der Nähe stationärer Punkte liefert

Satz 2.12 (Hartman-Grobman). Vorgelegt sei $x' = f(x)$, $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen, $\bar{x} \in \Omega$ mit $f(\bar{x}) = 0$.

Ferner sei \bar{x} hyperbolisch, d.h. $\text{Re}(\lambda) \neq 0$ für alle $\lambda \in \sigma(f'(\bar{x}))$. Dann existiert eine Umgebung U von \bar{x} in Ω , eine Umgebung V von 0 in \mathbb{R}^N und ein Homöomorphismus $H : U \rightarrow V$ mit

$$H(\Phi(t, x)) = \exp(tDf(\bar{x}))H(x), \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times U \text{ mit } \Phi(t, x) \in U.$$



Bemerkung 2.13. $x' = f(x)$, $x \in U$ und $y' = Df(\bar{x})y$, $y \in V$ sind topologisch konjugiert an hyperbolischen Ruhelagen.

2 Stabilität und Stabilitätskriterien

Definition 2.14. $f \in C^1(D, \mathbb{R}^N)$, $D \subset \mathbb{R}^N$ offen heißt *struktur-stabil*, falls ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass für alle Vektorfelder $\tilde{f} \in C^1(D, \mathbb{R}^N)$ mit $\|\tilde{f} - f\| < \varepsilon$ die Systeme $x' = f(x)$ und $y' = \tilde{f}(y)$ topologisch äquivalent sind.

Betrachte nun die Situation

$$x' = f(x, \lambda), \quad f \in C^1(D \times \Lambda, \mathbb{R}^N), \quad D \subset \mathbb{R}^N \text{ offen}, \quad \Lambda \subset \mathbb{R} \text{ offen.}$$

Definition 2.15. i) Jede Änderung der topologischen Struktur des Phasenporträts von $x' = f(x, \lambda)$ bei kleiner Änderung von λ heißt *Bifurkation*.

ii) Ein Parameterwert λ_0 für den das System $x' = f(x, \lambda)$ nicht struktur-stabil ist, heißt *Bifurkationswert*.

iii) Bifurkationen, die nahe einzelner Orbits (z.B. Ruhelagen oder periodische Lösungen) ablaufen heißen *lokale Bifurkationen*. Diejenigen, welche für $\lambda \neq \lambda_0$ einen großen Teil des Phasenraums betreffen, heißen *global*.

3 Reguläre Lösungen

3.1 Zweige stationärer Lösungen

Vorgelegt sei das parameterbehaftete dynamische System

$$\begin{aligned} x' &= f(x, \lambda) \\ f &\in C^1(\Omega \times \Lambda, \mathbb{R}^N), \quad \Omega \subset \mathbb{R}^N \text{ offen, } \Lambda \subset \mathbb{R}^p \text{ offen} \end{aligned} \quad (3.1)$$

Zur Berechnung der stationären Lösungen von (3.1) lösen wir

$$\begin{aligned} G(u, \lambda) &:= f(u, \lambda) = 0 \\ G &\in C^1(\Omega \times \Lambda, \mathbb{R}^N). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Sei nun $(u_0, \lambda_0) \in \Omega \times \Lambda$ eine Lösung von $G(u, \lambda) = 0$. Nach dem Satz über implizite Funktionen gibt es nun lokal einen Zweig $(\varphi(\lambda), \lambda)$, $\lambda \in \tilde{\Lambda}$, $\tilde{\Lambda}$ offene Umgebung von λ_0 in Λ mit

$$G(\varphi(\lambda), \lambda) = 0, \quad \forall \lambda \in \tilde{\Lambda},$$

falls

$$\frac{\partial G}{\partial u}(u_0, \lambda_0) \text{ invertierbar.} \quad (3.3)$$

In diesem Fall ist also die Lösungsgesamtheit von $G(u, \lambda) = 0$ lokal bei (u_0, λ_0) eine p -dimensionale über λ -parametrisierbare Fläche der Form $(\varphi(\lambda), \lambda)$, $\lambda \in \tilde{\Lambda}$. Im Fall des Systems (3.2) bedeutet (3.3), dass u_0 regulärer stationärer Punkt von $x' = f(x)$ ist. Zur numerischen Berechnung fixiert man um den p -vorhandenen Parametern $(p-1)$ -Stück und berechnet einen Lösungszweig bezüglich des einen herausgehobenen Parameters. Es sei also im folgenden o.E. $p = 1$, und es sei $z = (u, \lambda) \in \Omega \times \Lambda \subset \mathbb{R}^{N+1}$.

Definition 3.1. Eine Lösung $z_0 = (u_0, \lambda_0)$ von $G(z) = (u, \lambda) = 0$ heißt *regulär*, falls $\text{rang}(DG(z_0)) = N$ ist. Nicht reguläre Lösungen zu z_0 heißen *singulär*.

Offensichtlich gilt mit $DG(z_0) = (\frac{\partial G}{\partial u}(z_0), \frac{\partial G}{\partial \lambda}(z_0))$

$$\text{rang}(DG(z_0)) = N \Leftrightarrow \begin{cases} i) & \frac{\partial G}{\partial u}(z_0) \in \mathbb{R}^{N \times N} \text{ invertierbar oder} \\ ii) & \dim N(\frac{\partial G}{\partial u}(z_0)) = 1 \text{ und } \frac{\partial G}{\partial \lambda}(z_0) \notin R(\frac{\partial G}{\partial u}(z_0)). \end{cases}$$

Bemerkung 3.2. Die Punkte $z_0 = (u_0, \lambda_0)$ mit *ii)* heißen *Kantenpunkte*.

Mit einer abgewandten Form des Satzes über implizite Funktionen zeigt man

Lemma 3.3. Sei $z_0 = (u_0, \lambda_0)$ eine reguläre Lösung von $G(z) = 0$. Dann gibt es eine C^1 -Funktion $\tilde{\varphi} : I \rightarrow \Omega \times \Lambda$ mit $G(\tilde{\varphi}(s)) = 0$, $s \in I$, $I \subset \mathbb{R}$ Intervall. Im Allgemeinen lassen sich Lösungszweige über einen beliebigem Parameter $s \in I$, $I \subset \mathbb{R}$ Intervall parametrisieren.

Sei $z(s) = (u(s), \lambda(s))$, $s \in I$, $(u(0), \lambda(0)) = (u_0, \lambda_0)$ eine C^1 -Parametrisierung der Lösungsgesamtheit, und sei $z'(s) = (u'(s), \lambda'(s)) \neq 0$ der zugehörige Tangentialvektor.

3 Reguläre Lösungen

Man nennt die Parametrisierung dann regulär.

Dann gilt

$$G(u(s), \lambda(s)) = 0, \quad s \in I$$

$$\frac{\partial G}{\partial u}(u(s), \lambda(s))u'(s) + \frac{\partial G}{\partial \lambda}(u(s), \lambda(s))\lambda'(s) = 0,$$

d.h. $z'(s) = (u'(s), \lambda'(s)) \in N(DG(z(s)))$

Sei $s = 0$:

$$\underbrace{\frac{\partial G}{\partial u}(u_0, \lambda_0)u'(0)}_{\in R(\frac{\partial G}{\partial u}(z_0))} = -\frac{\partial G}{\partial \lambda}(u_0, \lambda_0)\lambda'(0)$$

Gilt nun also $\frac{\partial G}{\partial \lambda}(z_0) \notin R(\frac{\partial G}{\partial u}(z_0))$, so folgt $\lambda'(0) = 0$.

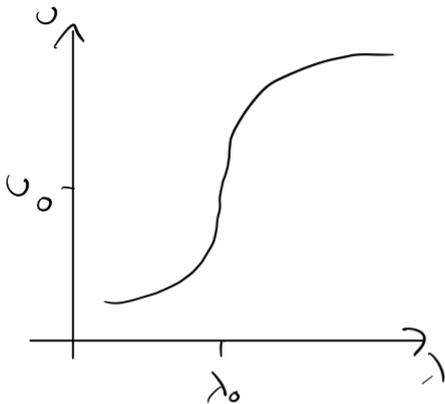


Fig. 1

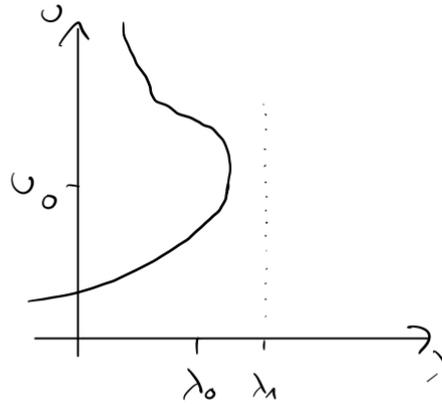


Fig. 2

3.2 Parameterfortsetzungen bei regulären Lösungen

Sei $z_0 = (u_0, \lambda_0)$ eine Lösung von $G(u, \lambda) = 0$. Wir möchten eine Lösung von $G(u, \lambda_1) = 0$, $\lambda_1 = \lambda_0 + \Delta\lambda$ fest, berechnen. Dazu verwenden wir das Newton-Verfahren an: Setze

$$u_1^{(0)} = u_0$$

und löse

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial u}(u_1^{(j)}, \lambda_1) d_1^{(j)} &= -G(u_1^{(j)}, \lambda_1) \\ u_1^{(j+1)} &= u_1^{(j)} + d_1^{(j)}, \quad j = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

bis zur Konvergenz.

Ist $\frac{\partial G}{\partial u}(u_1, \lambda_1)$ invertierbar, so sichert der lokale Konvergenzsatz für das Newtonverfahren lokal quadratische Konvergenz der Newtoniteration.

Offensichtlicher Mangel: Liegt die Situation von Fig. 2 vor und ist $\lambda_{alt} < \lambda_0$ und $\lambda_{alt} + \Delta\lambda > \lambda_0$, so kann das Newtonverfahren für $G(u, \lambda_{alt} + \Delta\lambda) = 0$ nicht konvergieren.

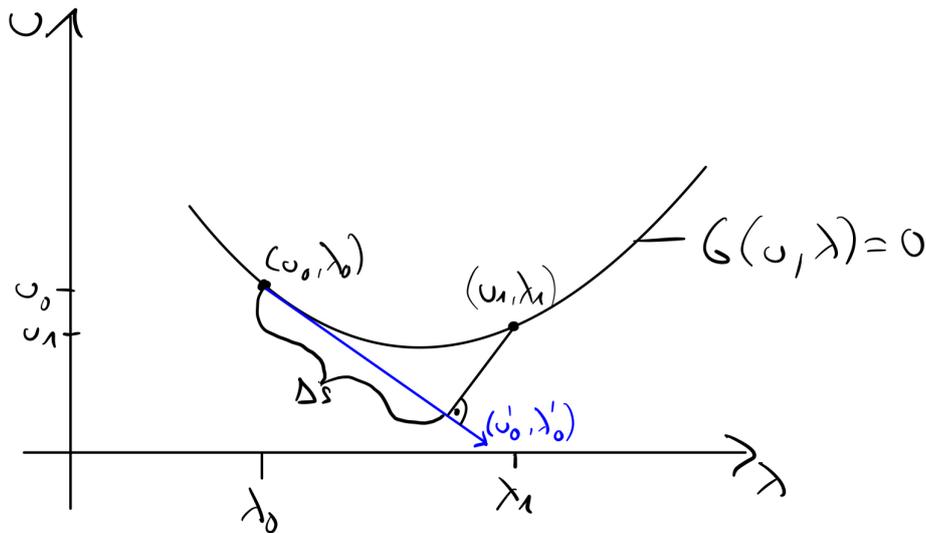
3.3 Fortsetzung nach der Bogenlänge (H. Keller)

Sei wieder (u_0, λ_0) eine reguläre Lösung von $G(u, \lambda) = 0$. Alle Lösungen lokal bei (u_0, λ_0) haben die Form $(u(\sigma), \lambda(\sigma))$, $\sigma \in I$, $(u_0, \lambda_0) = (u(0), \lambda(0))$. Vgl Lemma 3.3. Ferner sei (u'_0, λ'_0) der auf 1 normierte Tangentialvektor an der Lösungskurve im Punkte (u_0, λ_0) . Man löst dann das System

$$G(u_1, \lambda_1) = 0 \quad (3.4)$$

$$(u_1 - u_0)^\top u'_0 + (\lambda_1 - \lambda_0)^\top \lambda'_0 = \Delta s \quad (3.5)$$

für Δs geeignet.



Das Newtonverfahren lautet

$$u_1^0 = u_0 + \Delta s u'_0, \quad \lambda_1^0 = \lambda_0 + \Delta s \lambda'_0$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial G}{\partial u}(u_1^j, \lambda_1^j) & \frac{\partial G}{\partial \lambda}(u_1^j, \lambda_1^j) \\ u_0'^\top & \lambda_0' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_{u,1}^j \\ d_{\lambda,1}^j \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} G(u_1^j, \lambda_1^j) \\ (u_1^j - u_0)^\top u'_0 + (\lambda_1^j - \lambda_0)^\top \lambda'_0 - \Delta s \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

$$u_1^{j+1} = u_1^j + d_{u,1}^j, \quad \lambda_1^{j+1} = \lambda_1^j + d_{\lambda,1}^j, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

Schließlich berechnet man den neuen Tangentialvektor (u'_1, λ'_1) durch Lösen von

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial G}{\partial u}(u_1, \lambda_1) & \frac{\partial G}{\partial \lambda}(u_1, \lambda_1) \\ u_0'^\top & \lambda_0' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{u}'_1 \\ \bar{\lambda}'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und setzt

$$(u'_1, \lambda'_1) = \frac{(\bar{u}'_1, \bar{\lambda}'_1)}{\|(\bar{u}'_1, \bar{\lambda}'_1)\|_2}.$$

Diese Fortsetzungsmethode wird von den professionellen (oder wie z.B. MATCONT bzw. AUTO-07P) gewählt.

3 Reguläre Lösungen

Satz 3.4. Die Jacobi-Matrix der Bogenlängenfortsetzung ist invertierbar an jedem regulären Lösungspunkt (u_0, λ_0) falls $\Delta s > 0$ hinreichend klein gewählt wird.

Beweis: Ausgehend von (u_0, λ_0) wird $(u_1, \lambda_1) = (u_1(\Delta s), \lambda_1(\Delta s))$ berechnet durch

$$H(u, \lambda, \Delta s) = \begin{pmatrix} G(u, \lambda) \\ (u_1 - u_0)^\top u'_0 + (\lambda_1 - \lambda_0) \lambda'_0 - \Delta s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es gilt $H(u_0, \lambda_0, 0) = 0$. Ist $\frac{\partial H}{\partial(u, \lambda)}(u_0, \lambda_0, 0)$ invertierbar, so gibt es nach dem Satz über implizite Funktionen für $|\Delta s| < \varepsilon$ eine auflösende Funktion $(u_1(\Delta s), \lambda_1(\Delta s))$ mit

$$H(u_1(\Delta s), \lambda_1(\Delta s), \Delta s) = 0, \quad |\Delta s| < \varepsilon.$$

Man findet

$$\frac{\partial H}{\partial(u, \lambda)}(u_0, \lambda_0, 0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial G}{\partial u}(u_0, \lambda_0) & \frac{\partial G}{\partial \lambda}(u_0, \lambda_0) \\ u'_0{}^\top & \lambda'_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N+1 \times N+1}.$$

Sei nun $(\hat{u}, \hat{\lambda}) \in N(\frac{\partial H}{\partial(u, \lambda)}(u_0, \lambda_0, 0))$ so gilt $\frac{\partial G}{\partial u}(u_0, \lambda_0) \hat{u} + \frac{\partial G}{\partial \lambda}(u_0, \lambda_0) \hat{\lambda} = 0$. Wegen $\text{rang}(DG(u_0, \lambda_0)) = N$ und somit $N(DG(u_0, \lambda_0)) = \text{span}\{(u'_0, \lambda'_0)\}$ folgt $(\hat{u}, \hat{\lambda}) = \alpha(u'_0, \lambda'_0)$ für ein $\alpha \in \mathbb{R}$. Weiter folgt

$$u'_0{}^\top \hat{u} + \lambda_0 \hat{\lambda} = \alpha \|(u'_0, \lambda'_0)\|_2^2 = \alpha = 0,$$

und somit $(\hat{u}, \hat{\lambda}) = (0, 0)$. Also ist $\frac{\partial H}{\partial(u, \lambda)}(u_0, \lambda_0, 0)$ invertierbar und für $\Delta s > 0$ hinreichend klein ist (u_1, λ_1) wohldefiniert. \square

Ferner ist

$$\frac{\partial H}{\partial(u, \lambda)}(u_1(\Delta s), \lambda_1(\Delta s), \Delta s) = \begin{pmatrix} \frac{\partial G}{\partial(u, \lambda)}(u_1(\Delta s), \lambda_1(\Delta s), \Delta s) & \frac{\partial G}{\partial \lambda}(u_1(\Delta s), \lambda_1(\Delta s), \Delta s) \\ u'_0{}^\top & \lambda'_0 \end{pmatrix}$$

invertierbar für $|\Delta s| < \varepsilon$. Also kann der neue Tangentialvektor (u'_1, λ'_1) berechnet werden.

Bei der Anwendung des Newtonverfahrens (3.6) zur Lösung von (3.5) müssen Gleichungssysteme der Form

$$\begin{pmatrix} A & b \\ c^\top & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}, \quad A \in \mathbb{R}^{N \times N}, \quad b, c, f \in \mathbb{R}^N, \quad d, g \in \mathbb{R}$$

effizient gelöst werden.

Ist z.B. A eine dünn besetzte reguläre Matrix, so empfiehlt sich die folgende Vorgehensweise:

- Löse $Aw = f, Av = b$
- Setze $E = d - c^\top v$
- Löse $Ey = g - c^\top w$
- und setze $x = w - vy$.

3.4 Nicht-hyperbolische stationäre Punkte

Beispiele zeigen:

Interessant sind Punkte (\hat{u}, λ) mit $\frac{\partial G}{\partial u}(\hat{u}, \hat{\lambda})$ nicht hyperbolisch.

Punkte: $(\hat{x}, \hat{\lambda})$ mit $\frac{\partial G}{\partial x}(\hat{x}, \hat{\lambda})$ nicht hyperbolisch, d.h. besitzt Eigenwerte λ mit $\operatorname{Re}(\lambda) = 0$.

Ziele:

- Die Berechnung solcher Punkte (\hat{u}, λ)
- Die Charakterisierung der Änderung der Dynamik von $x' = f(x, \lambda)$ beim Überqueren solcher Punkte

Zur Problemstellung a):

Betrachte $G(u, \lambda) = 0$, $G \in C^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$. Es existiere ein Zweig $(u(s), \lambda(s))$, $s \in I$ glatt mit $(u'(s), \lambda'(s)) \neq 0$, $s \in I$.

Zwei Mechanismen, welche zum Verlust der Hyperbolizität von $\frac{\partial G}{\partial u}(u(s), \lambda(s))$ führen:

- Ein reeller Eigenwert von $\frac{\partial G}{\partial u}(u(s), \lambda(s))$ überquert bei $s = s_0$ die Null.
- Ein Paar konjugiert komplexer Eigenwerte von $\frac{\partial G}{\partial u}(u(s), \lambda(s))$ überquert bei $s = s_0$ die imaginäre Achse.

Betrachte das Lorenz-System

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \sigma(y - z) \\ rx - y - xz \\ xy - bz \end{pmatrix}$$

mit stationärer Lösung $(\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1) = (0, 0, 0)$. Es gilt

$$\frac{\partial f}{\partial(x, y, z)}(0, 0, 0, \sigma, b, r) = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix}$$

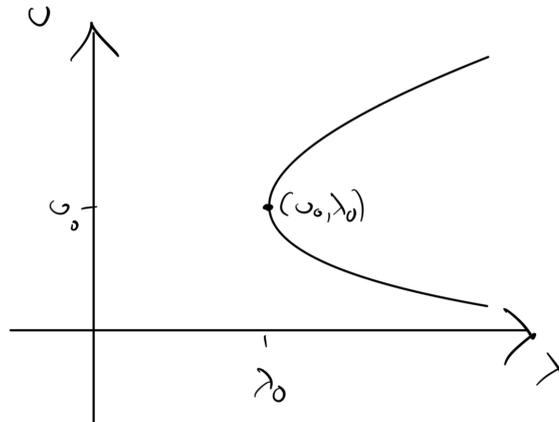
mit Eigenwert $\lambda_3 = -b$,

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(-1 - \sigma \pm \sqrt{(1 + \sigma)^2 - 4\sigma(1 - r)} \right).$$

- Für $0 < r < 1$ liegt Stabilität vor
- für $r > 1$ liegt Instabilität vor
- für $r = 1$ ist $0 \in \sigma \left(\frac{\partial f}{\partial(x, y, z)}(0, 0, 0) \right)$

3.5 Berechnung von Umkehrpunkten

Definition 3.5. Ein Punkt $(u_0, \lambda_0) = (u(s_0), \lambda(s_0))$, $s_0 \in I$ heißt *Umkehrpunkt* des glatten regulären Zweiges $(u(s), \lambda(s))$, falls die Funktion $\lambda(s)$ bei $s = s_0$ ein lokales Extremum besitzt.



Notwendige Bedingung an einen Umkehrpunkt ist also $\lambda'(s_0) = 0$, hinreichend ist $\lambda'(s_0) = 0$, $\lambda''(s_0) \neq 0$. Ein solcher Punkt heißt dann *quadratischer Umkehrpunkt*. Sei nun $\lambda'(s_0) = 0$. Dies bedeutet für den Zweig

$$G(u(s), \lambda(s)) := G^s = 0$$

$$\frac{\partial G}{\partial u}(u(s), \lambda(s))u'(s) + \frac{\partial G}{\partial \lambda}(u(s), \lambda(s))\lambda'(s) =: G_u^s u'(s) + G_\lambda^s \lambda'(s) = 0$$

Für $s = s_0$ folgt

$$G_u^0 u'(s_0) + G_\lambda^0 \lambda'(s_0) = G_u^0 u'(s_0) = 0$$

d.h. $0 \neq u'(s_0) \in N(G_u^0)$ und $0 \in \sigma(G_u^0)$. (\rightarrow es liegt Mechanismus i) vor).

Sei nun genauer 0 ein algebraisch einfacher Eigenwert von G_u^0 . Insbesondere folgt dann

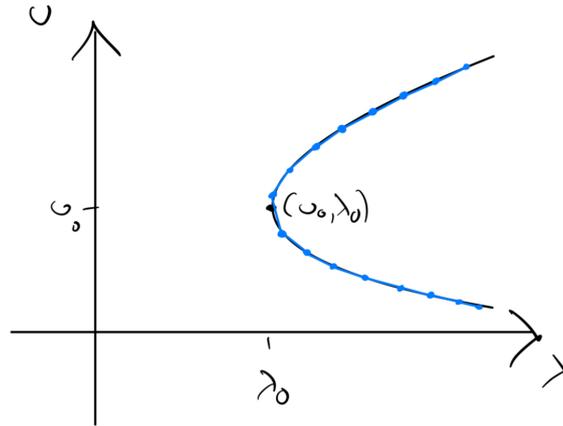
$$N(G_u^0) = \text{span}(\phi_0), \quad \phi_0^\top \phi_0 = 1$$

mit

$$\phi_0 = \frac{u'(s_0)}{\|u'(s_0)\|_2}.$$

In der numerischen Rechnung wird dadurch ein Fortsetzungsalgorithmus statt eines Lösungszweiges $z(s) = (u(s), \lambda(s))$, $s \in I$, ein Polygonzug $z(s_i) = (u(s_i), \lambda(s_i))$, $i = 1, 2, 3, \dots$ berechnet.

3 Reguläre Lösungen



Präzisiere jetzt ein Kriterium für die Existenz eines Umkehrpunktes.

Lemma 3.6. Sei $z(s) = (u(s), \lambda(s))$, $s \in I$ ein C^1 -Lösungszweig von $G(u, \lambda) = 0$ mit $(u'(s), \lambda'(s)) \neq 0$. Für 3 aufeinanderfolgende Punkte $z(s_i) = (u(s_i), \lambda(s_i))$, $i = 1, 2, 3$, $s_1 < s_2 < s_3$ gelte

$$(\lambda(s_3) - \lambda(s_2))(\lambda(s_2) - \lambda(s_1)) < 0.$$

Dann existiert ein $\hat{s} \in (s_1, s_3)$ mit $\lambda'(\hat{s}) = 0$.

Beweis: Sei $(\lambda(s_3) - \lambda(s_2))(\lambda(s_2) - \lambda(s_1)) < 0$. Dann gilt entweder

- i) $\lambda(s_3) > \lambda(s_2)$ und $\lambda(s_1) > \lambda(s_2)$ oder
- ii) $\lambda(s_3) < \lambda(s_2)$ und $\lambda(s_1) < \lambda(s_2)$

Betrachte im Folgenden Möglichkeit i).

Nach dem Mittelwertsatz existiert $\hat{s}_1 \in (s_1, s_2)$ und $\hat{s}_2 \in (s_2, s_3)$ mit

$$\frac{\lambda(s_3) - \lambda(s_2)}{s_3 - s_2} = \lambda'(\hat{s}_2) > 0$$

$$\frac{\lambda(s_2) - \lambda(s_1)}{s_2 - s_1} = \lambda'(\hat{s}_1) < 0.$$

Mit dem Zwischenwertsatz existiert nun ein $\hat{s} \in [\hat{s}_1, \hat{s}_2]$ mit $\lambda'(\hat{s}) = 0$.

Im Fall ii) ist der Beweis analog zu führen. □

3 Reguläre Lösungen

Die Situation in der Nähe eines Umkehrpunktes wird beschrieben durch

Satz 3.7. Sei $(u(s), \lambda(s))$, $s \in I$ ein C^2 -Lösungszweig von $G(u, \lambda) = 0$ mit $(u'(s), \lambda'(s)) \neq 0$, $s \in I$. Ferner besitze $G_u^0 := \frac{\partial G}{\partial u}(u(s_0), \lambda(s_0))$ den algebraisch einfachen Eigenwert 0 mit Eigenvektor ϕ_0 , $\phi_0^\top \phi_0 = 1$, und $DG^0 := DG(u(s_0), \lambda(s_0)) \in \mathbb{R}^{N \times N+1}$ besitze den Rang N . Dann gilt $\lambda'(s_0) = 0$, und die folgenden Bedingungen sind gleichwertig:

i) $\lambda''(s_0) \neq 0$

ii) $(u(s_0), \lambda(s_0), \phi_0)$ ist eine reguläre Lösung¹ des Gleichungssystems

$$T(u, \lambda, \phi) = \begin{pmatrix} G(u, \lambda) \\ G_u(u, \lambda)\phi \\ \phi^\top \phi - 1 \end{pmatrix} = 0$$

Bemerkung 3.8. • Wegen $\lambda'(s_0) = 0$, $\lambda''(s_0) \neq 0$ besitzt der Zweig $(u(s), \lambda(s))$ lokal bei $s = s_0$ das Aussehen einer Parabel.

- Das Gleichungssystem $T(u, \lambda, \phi) = 0$, $T : \mathbb{R}^{2N+1} \rightarrow \mathbb{R}^{2N+1}$ heißt *definierendes Gleichungssystem* für Umkehrpunkte. An einem quadratischen Umkehrpunkt konvergiert das Newtonverfahren zur Lösung von $T(u, \lambda, \phi) = 0$ lokal quadratisch. Mögliche Anfangswerte für die Newtoniteration

$$u^{(0)} = u(s_2), \lambda^{(0)} = \lambda(s_2), \phi^{(0)} = \frac{u(s_2) - u(s_1)}{\|u(s_2) - u(s_1)\|_2},$$

wobei s_1, s_2, s_3 die Voraussetzungen von Lemma 3.6 erfüllen.

Beweis: (von Satz 3.7).

Sei

$$\begin{aligned} G^s &= G(u(s), \lambda(s)) = 0, \quad s \in I \\ G_u^s u'(s) + G_\lambda^s \lambda'(s) &= 0, \quad s \in I \\ s = s_0 : G_u^0 u'(s_0) &= -G_\lambda^0 \lambda'(s_0) \end{aligned} \tag{3.7}$$

Wegen $\text{rang}(G_u^0, G_\lambda^0) = N$ und $\text{rang}(G_u^0) = N - 1$ folgt $G_\lambda^0 \notin \text{R}(G_u^0)$. Dies impliziert $\lambda'(s_0) = 0$ in (3.7).

i) \Rightarrow ii) Sei $\lambda''(s_0) \neq 0$. Es ist

$$\begin{aligned} T(u, \lambda, \phi) &= \begin{pmatrix} G(u, \lambda) \\ G_u(u, \lambda)\phi \\ \phi^\top \phi - 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2N+1} \\ DT(u, \lambda, \phi) &= \begin{pmatrix} G_u(u, \lambda) & G_\lambda(u, \lambda) & 0 \\ G_{uu}(u, \lambda)\phi & G_{u\lambda}(u, \lambda)\phi & G_u(u, \lambda) \\ 0 & 0 & 2\phi^\top \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2N+1 \times 2N+1} \\ DT(u(s_0), \lambda(s_0), \phi_0) &= \begin{pmatrix} G_u^0 & G_\lambda^0 & 0 \\ G_{uu}^0 \phi_0 & G_{u\lambda}^0 \phi_0 & G_u^0 \\ 0 & 0 & 2\phi_0^\top \end{pmatrix} \end{aligned}$$

¹Hier bedeutet regulär, dass $DT(u(s_0), \lambda(s_0), \phi_0)$ invertierbar ist.

3 Reguläre Lösungen

Zeige nun $DT(u(s_0), \lambda(s_0), \phi_0)$ invertierbar. Sei $(w, \sigma, \psi) \in N(DT(u(s_0), \lambda(s_0), \phi_0))$.

Zu zeigen bleibt $\lambda''(s_0) \neq 0 \Rightarrow (w, \sigma, \psi) = 0$.

Es gilt

$$\begin{aligned} G_u^0 w + \sigma G_\lambda^0 &= 0 \\ G_{uu}^0(\phi_0, w) + G_{u\lambda}^0 \phi_0 \sigma + G_u^0 \psi &= 0 \\ 2\phi_0^\top \psi &= 0 \end{aligned}$$

Erhalte

$$\underbrace{G_u^0 w}_{\in R(G_u^0)} = -\sigma \underbrace{G_\lambda^0}_{\notin R(G_u^0)} \Rightarrow \sigma = 0$$

und somit $w \in N(G_u^0)$, d.h. $w = \alpha \phi_0$.

Einsetzen in die zweite Gleichung liefert

$$\alpha G_{uu}^0(\phi_0, \phi_0) = \underbrace{-G_u^0 \psi}_{\in R(G_u^0)}. \quad (3.8)$$

Benötige nun die Äquivalenz

$$G_{uu}^0(\phi_0, \phi_0) \notin R(G_u^0) \Leftrightarrow \lambda''(s_0) \neq 0. \quad (3.9)$$

Mit (3.9) folgt $\alpha = 0 \Leftrightarrow \lambda''(s_0) \neq 0$ und somit $w = \alpha \phi_0 = 0$, $G_u^0 \psi = 0$, d.h. $\psi \in N(G_u^0)$, $\psi = \beta \phi_0$ und mit $0 = 2\phi_0^\top \psi = 2\beta \phi_0^\top \phi_0 = 2\beta$ erhalten wir $\beta = 0$ und somit $\psi = 0$.

ii) \Rightarrow i) Sei nun $(u(s_0), \lambda(s_0), \phi_0)$ eine reguläre Lösung von $T(u, \lambda, \phi) = 0$. Zu zeigen ist $\lambda''(s_0) \neq 0$.

Annahme: $\lambda''(s_0) = 0$.

Nach der Äquivalenz (3.9) ist dies gleichwertig zu $G_{uu}^0(\phi_0, \phi_0) \in R(G_u^0)$. Somit existiert ein $\tilde{w} \in \mathbb{R}^N$ mit $G_u^0 \tilde{w} = -G_{uu}^0(\phi_0, \phi_0)$.

Setze $\hat{w} = \tilde{w} - (\phi_0^\top \tilde{w}) \phi_0$ und finde

$$G_u^0 \hat{w} = G_u^0 \tilde{w} - \phi_0^\top \tilde{w} \underbrace{G_u^0 \phi_0}_{=0} = G_u^0 \tilde{w} = -G_{uu}^0(\phi_0, \phi_0)$$

sowie

$$2\phi_0^\top \hat{w} = 2\phi_0^\top \tilde{w} - 2\phi_0^\top \tilde{w} \phi_0^\top \phi_0 = 0$$

Also folgt für $w = \phi_0, \sigma = 0, \psi = \hat{w}$ sofort

$$DT(u(s_0), \lambda(s_0), \phi_0) \begin{pmatrix} \phi_0 \\ 0 \\ \hat{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_u^0 \phi_0 \\ G_{uu}^0(\phi_0, \phi_0) + G_u^0 \hat{w} \\ 2\phi_0^\top \hat{w} \end{pmatrix} = 0,$$

d.h. $0 \neq (\phi_0, 0, \hat{w}) \in N(DT(u(s_0), \lambda(s_0), \phi_0))$, was ein Widerspruch zu $DT(u(s_0), \lambda(s_0), \phi_0)$ invertierbar ist.

3 Reguläre Lösungen

Noch zu zeigen bleibt die Äquivalenz (3.9):

$$G^s = G(u(s), \lambda(s)) = 0, \quad s \in I \quad (3.10)$$

$$G_u^s u'(s) + G_\lambda^s \lambda'(s) = 0, \quad s \in I \quad (3.11)$$

$$G_{uu}^s(u'(s), u'(s)) + G_{u\lambda}^s \lambda'(s) u'(s) + G_{\lambda\lambda}^s \lambda'(s)^2 + G_\lambda^s \lambda''(s) = 0.$$

Für $s = s_0$ folgt mit $\lambda'(s_0) = 0$, $u'(s_0) = c\phi_0$, $c \neq 0$ sofort

$$c^2 G_{uu}^0(\phi_0, \phi_0) + G_u^0 u''(s_0) + G_\lambda^0 \lambda''(s_0) = 0.$$

Nun gilt $G_{uu}^0(\phi_0, \phi_0) \in \mathbb{R}(G_u^0) \Leftrightarrow \lambda''(s_0) = 0$

” \Rightarrow ” Aus

$$- \underbrace{G_\lambda^0}_{\notin \mathbb{R}(G_u^0)} \lambda''(s_0) = \underbrace{G_u^0 u''(s_0)}_{\in \mathbb{R}(G_u^0)} + \underbrace{c^2 G_{uu}^0(\phi_0, \phi_0)}_{\in \mathbb{R}(G_u^0)}$$

folgt $\lambda''(s_0) = 0$.

” \Leftarrow ” Für $\lambda''(s_0) = 0$ folgt

$$G_{uu}^0(\phi_0, \phi_0) = - \underbrace{\frac{1}{c^2} G_u^0 u''(s_0)}_{\in \mathbb{R}(G_u^0)}$$

Damit ist (3.9) gezeigt und der Satz 3.7 bewiesen. □

3.6 Berechnung von Hopf-Punkten

Der 2-te Mechanismus, wie für einen Zweig $(u(s), \lambda(s))$, $s \in I$ die Linearisierung $G_u(u(s), \lambda(s))$ die Hyperbolizität verlieren kann, ist, dass ein paar konjugiert komplexer Eigenwerte die imaginäre Achse überquert.

Sei jetzt $(u(s_0), \lambda(s_0))$ eine Lösung von $G(u, \lambda) = 0$ und es gelte $\pm i\omega_0 \in \sigma(G_u(u(s_0), \lambda(s_0)))$. Mit dem zugehörigen Eigenvektor $x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}^N$ finden wir

$$G_u^0(x_0 + iy_0) = i\omega_0(x_0 + iy_0).$$

Aufspaltung von Real- und Imaginärteil liefert

$$G_u^0 x_0 = -\omega_0 y_0 \quad (\text{Realteil})$$

$$G_u^0 y_0 = \omega_0 x_0 \quad (\text{Imaginärteil})$$

Ist nun überdies $i\omega_0$ algebraisch einfacher Eigenwert von $G_u(u(s_0), \lambda(s_0))$, s_0 findet man mit dem Satz über implizite Funktionen ein Intervall $J \subset I$ sowie Funktionen $\mu(s), \nu(s) \in \mathbb{R}$, $a(s), b(s) \in \mathbb{R}^N$, $s \in J$ mit $\mu(s_0) = 0$, $\nu(s_0) = \omega_0$, $a(s_0) = x_0$, $b(s_0) = y_0$ und

$$G_u(u(s), \lambda(s))(a(s) + ib(s)) = (\mu(s) + i\nu(s))(a(s) + ib(s)), \quad s \in J.$$

3 Reguläre Lösungen

Möchte man nun einen Hopf-Punkt, d.h. eine Lösung (u_0, λ_0) von $G(u, \lambda) = 0$ dessen Linearisierung $G_u(u_0, \lambda_0)$ ein paar rein imaginärer Eigenwerte besitzt berechnen, s_0 benötigt man ein definierendes Gleichungssystem für Hopf Punkte. Man findet hierfür etwa

$$T(u, \lambda, x, y, \omega) = \begin{pmatrix} G(u, \lambda) \\ G_u(u, \lambda)x + \omega y \\ G_u(u, \lambda)y - \omega x \\ c^\top x \\ c^\top y - 1 \end{pmatrix} = 0$$

Dabei sind $c^\top x = 0$, $c^\top y = 1$ die Normierungsbedingungen für den Realteil und den Imaginärteil des Eigenvektors zum Eigenwert $i\omega$.

Satz 3.9 (ohne Beweis). Sei $(u(s), \lambda(s))$, $s \in I$ ein C^2 -Lösungszweig und $(u'(s), \lambda'(s)) \neq 0$, $s \in I$. Für $s = s_0$ besitze $G_u(u(s_0), \lambda(s_0))$ der algebraisch einfache Eigenwert $i\omega_0$, $\omega_0 \neq 0$ mit Eigenvektor $x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}^N$. Ferner sei $c \in \mathbb{R}^N$ mit $c^\top x_0 = 0$, $c^\top y_0 = 1$. Es sei 0 nicht Eigenwert von $G_u(u(s_0), \lambda(s_0))$. Dann sind gleichwertig

- i) Für den Eigenwert $\mu(s) + i\nu(s)$ von $G_u(u(s), \lambda(s))$ mit $\mu(s_0) = 0$, $\nu(s_0) = \omega_0$ gilt $\mu'(s_0) \neq 0$.
- ii) $(u(s_0), \lambda(s_0), x_0, y_0, \omega_0) \in \mathbb{R}^{3N+2}$ ist eine reguläre Lösung des definierenden Gleichungssystem

$$T(u, \lambda, x, y, \omega) = \begin{pmatrix} G(u, \lambda) \\ G_u(u, \lambda)x + \omega y \\ G_u(u, \lambda)y - \omega x \\ c^\top x \\ c^\top y - 1 \end{pmatrix} = 0$$

Bemerkung 3.10. • Das Newtonverfahren zur Lösung von $T(u, \lambda, x, y, \omega) = 0$ konvergiert lokal quadratisch bei $(u(s_0), \lambda(s_0), x_0, y_0, \omega_0)$, falls $\mu'(s_0) \neq 0$, d.h. falls das Paar $\pm i\omega_0$ die imaginäre Achse wirklich überquert.

- Die Aufgabe, wann zwischen zwei Lösungspunkten $(u(s_1), \lambda(s_1))$ und $(u(s_2), \lambda(s_2))$ auf einem Lösungszweig $(u(s), \lambda(s))$, $s \in I$, $s_1 < s_2$ ein Hopf-Punkt liegt, ist noch nicht befriedigend gelöst. Man kann selbstverständlich an jeder Lösung $(u(s_i), \lambda(s_i))$ alle Eigenwerte von $G_u(u(s_i), \lambda(s_i))$ ausrechnen. Aber dann dominiert für $N \gg 1$ die Rechenzeit zur Berechnung der Eigenwerte die Rechenzeit zur Berechnung des Zweiges.

4 Periodische Lösungen dynamischer Systeme

4.1 Lokale transversale Schnitte

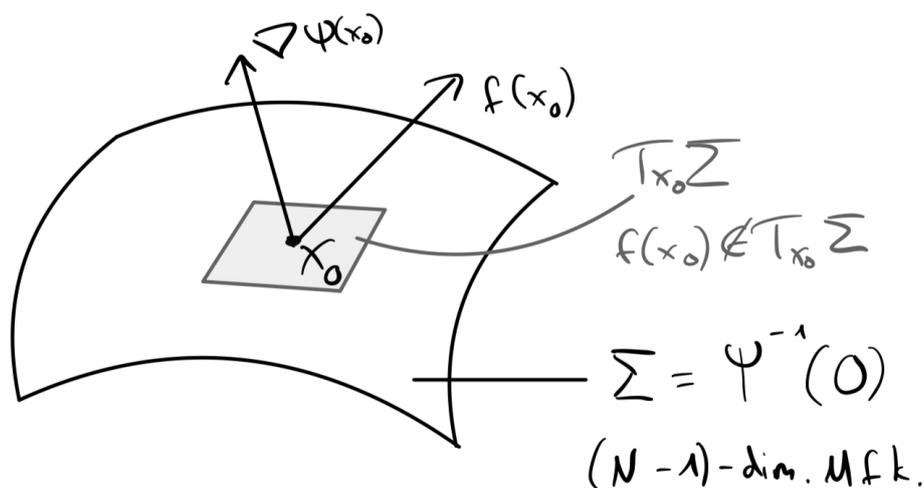
Vorgelegt sei das dynamische System

$$x' = f(x), \quad f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N), \quad \Omega \subset \mathbb{R}^N \text{ offen}$$

mit Lösungsfunktion $\bar{x}(t, \xi)$. Wie definieren nun einen lokalen transversalen Schnitt Σ an einem Punkt $x_0 \in \Omega$.

Definition 4.1. Sei $x_0 \in \Omega$, U eine Umgebung von x_0 in Ω und $\Psi \in C^1(U, \mathbb{R})$ mit $\Psi(x_0) = 0$ und $\langle \nabla \Psi(x), f(x) \rangle \neq 0 \quad \forall x \in U$.

Dann heißt $\Sigma := \Psi^{-1}(0) = \{x \in U : \Psi(x) = 0\}$ ein *lokaler transversaler Schnitt* bei x_0 .



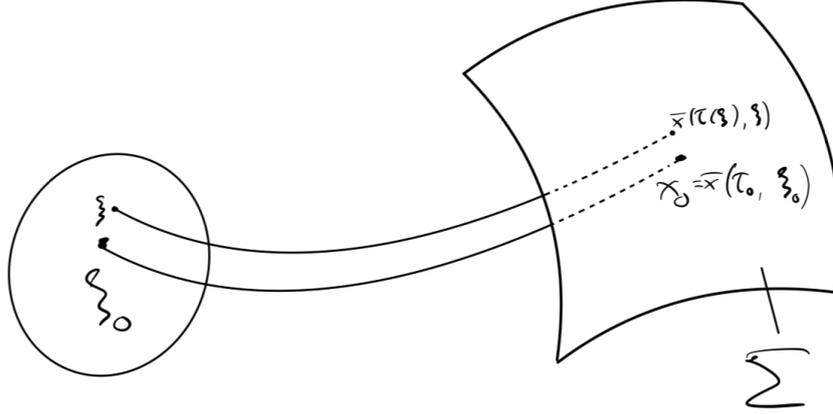
Bemerkung 4.2. An jedem Punkt $x_0 \in \Omega$ mit $f(x_0) \neq 0$ kann durch

$$\Psi(x) = \langle f(x_0), x - x_0 \rangle$$

und eine geeignete Wahl von U ein lokaler transversaler Schnitt $\Sigma := \Psi^{-1}(0)$ konstruiert werden, denn $\Psi(x_0) = \langle f(x_0), 0 \rangle = 0$, $\langle \nabla \Psi(x), f(x) \rangle = \langle f(x_0), f(x) \rangle \neq 0$ für $\|x - x_0\|$ hinreichend klein.

Satz 4.3. Sei Σ ein lokaler transversaler Schnitt bei $x_0 = \bar{x}(\tau_0, \xi_0)$, $\xi_0 \in \Omega$, $\tau_0 \in J(\xi_0)$. Dann gibt es eine Umgebung V von ξ_0 , ein $\varepsilon > 0$ und ein $\tau \in C^1(V, \mathbb{R})$ mit $\tau(\xi_0) = \tau_0$ mit

$$\bar{x}(t, \xi) \in \Sigma, \quad |t - \tau_0| < \varepsilon \Leftrightarrow t = \tau(\xi), \quad \forall \xi \in V.$$



Beweis: Sei U eine Umgebung von $x_0 \in \Omega$ und $\Psi \in C^1(U, \mathbb{R})$ definiere einen lokal transversalen Schnitt $\Sigma = \Psi^{-1}(0)$. Dann ist

$$\begin{aligned} W &= \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \Omega; t \in J(x), \bar{x}(t, x) \in U\} \\ &= x^{-1}(U) \subset \mathcal{D} \end{aligned}$$

offen, da $x \in C^1(\mathcal{D}, \Omega)$. Ferner gilt $(\tau_0, \xi_0) \in W$, da $\bar{x}(\tau_0, \xi_0) = x_0 \in U$, $\tau_0 \in J(\xi_0)$. Daher existieren $\delta_1, \delta_2 > 0$ mit $(t, \xi) \in W$ für $|t - \tau_0| < \delta_1$, $\|\xi - \xi_0\| < \delta_2$. Setze

$$\begin{aligned} g &: (\tau_0 - \delta_1, \tau_0 + \delta_1) \times B_{\delta_2}(\xi_0) \rightarrow \mathbb{R} \\ &(t, \xi) \mapsto g(t, \xi) = \Psi(\bar{x}(t, \xi)). \end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} g(\tau_0, \xi_0) &= \Psi(\bar{x}(\tau_0, \xi_0)) = \Psi(x_0) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} g(t, \xi) &= \langle \nabla \Psi(\bar{x}(t, \xi)), f(\bar{x}(t, \xi)) \rangle \\ \frac{\partial}{\partial t} g(\tau_0, \xi_0) &= \langle \nabla \Psi(\underbrace{\bar{x}(\tau_0, \xi_0)}_{x_0}), f(\bar{x}(\tau_0, \xi_0)) \rangle = \langle \nabla \Psi(x_0), f(x_0) \rangle \neq 0. \end{aligned}$$

Somit existiert gemäß dem Satz über implizite Funktionen eine Umgebung I_0 von τ_0 in $(\tau_0 - \delta_1, \tau_0 + \delta_1)$, eine Umgebung V von ξ_0 in $B_{\delta_2}(x_0)$ und eine C^1 -Funktion $\tau : V \rightarrow I_0$ mit

$$g(t, \xi) = 0, (t, \xi) \in I_0 \times V \Leftrightarrow \xi \in V \text{ und } t = \tau(\xi).$$

Wir bezeichnen $\tau(\xi)$ als die Auftreffzeit und $\bar{x}(\tau(\xi), \xi)$ als den Auftreffpunkt des bei ξ gestarteten Orbits auf Σ . \square

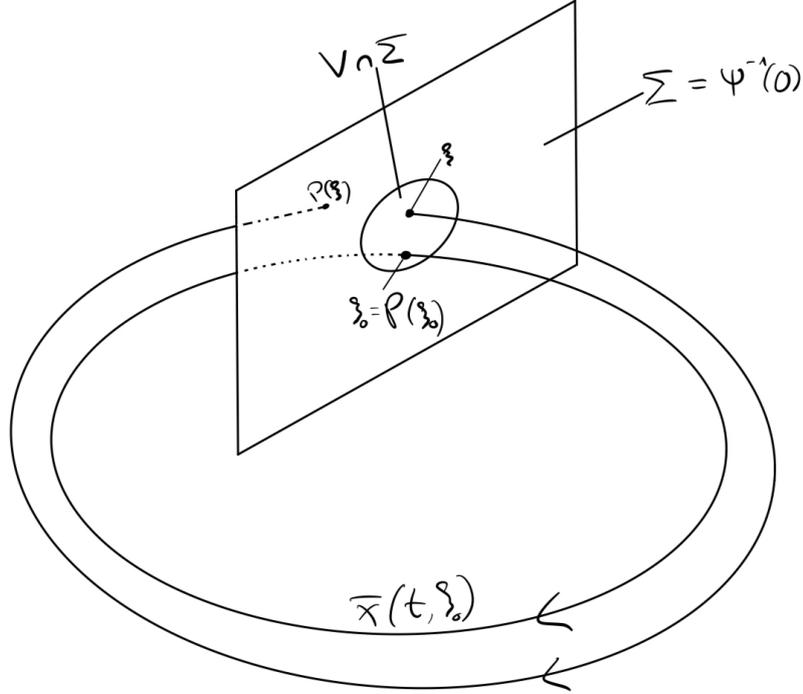
4.2 Die Poincare-Abbildung

Eine besondere Situation liegt vor, wenn wir einen Orbit $\gamma(x_0) = \{\bar{x}(t, x_0); t \in \mathbb{R}\}$ mit Periode $T > 0$ haben und $\xi_0 = x_0$, $\tau_0 = T$ wählen. Dabei nennen wir einen Orbit $\gamma(x_0)$ periodisch mit Periode $T > 0$, falls $\bar{x}(t, x_0) = \bar{x}(t+T, x_0)$ und $\bar{x}(t, x_0) \neq x_0$ für $0 < t < T$.

Definition 4.4. Sei $\gamma(x_0)$ ein Orbit der Periode $T > 0$ und Σ ein lokaler transversaler Schnitt bei x_0 . Konstruiert man gemäß Satz 4.3 zu $\xi_0 = x_0$ die eindeutig bestimmte Auftreffzeit $\tau(\xi)$, $\xi \in V$ mit $(\tau(\xi) - T) < \varepsilon$, so heißt die Abbildung

$$P : V \cap \Sigma \rightarrow \Sigma, \quad \xi \mapsto P(\xi) := \bar{x}(\tau(\xi), \xi)$$

die *Poincaré-Abbildung* des periodischen Orbits bezüglich Σ und x_0 .



Man beachte, dass ξ_0 ein Fixpunkt von P ist, d.h. $\xi_0 = P(\xi_0)$, und dass P Hyperflächenstücke $V \cap \Sigma$ wieder nach Σ abbildet. Bei geeigneter Wahl der Koordinaten in Σ , z.B. als Basis von $f(\xi_0)^\perp$, lässt sich P dabei als Abbildung des \mathbb{R}^{N-1} in sich auffassen.

Definition 4.5. Ein Fixpunkt ξ_0 heißt

- *stabil* für $x_{n+1} = F(x_n)$, falls es zu jeder Umgebung U von ξ_0 eine Umgebung V von ξ_0 gibt mit $F^n(x)$, $x \in V$, $n \in \mathbb{N}$ existiert und in U liegt.
- *anziehend* für $x_{n+1} = F(x_n)$, falls es eine Umgebung V von ξ_0 gibt, so dass $F^n(x)$ für alle $x \in V$, $n \in \mathbb{N}$ existiert und

$$\|F^n(x) - \xi_0\| \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty.$$

- *asymptotisch stabil*, falls ξ_0 stabil und anziehend ist, und *instabil*, falls ξ_0 nicht stabil ist.

Satz 4.6. Sei $\gamma(\xi_0) = \{\bar{x}(t, \xi_0); 0 \leq t < T\}$ ein T -periodischer Orbit bezüglich eines lokal transversalen Schnittes Σ bei ξ_0 . Dann ist $\gamma(\xi_0)$ (asymptotisch) stabil für $x' = f(x)$ genau dann, wenn ξ_0 (asymptotisch) stabiler Fixpunkt von $x_{n+1} = P(x_n)$ ist.

Bemerkung 4.7. • Satz 4.6 sagt insbesondere, dass es für die Stabilität des periodischen Orbits gleichgültig ist, wie wir die Poincaré-Abbildung konstruieren, d.h. welche Stelle ξ_0 und welchen transversalen Schnitt Σ wir auswählen.

- Hinreichendes Kriterium für asymptotische Stabilität eines Fixpunktes ξ_0 von $x_{n+1} = F(x_n)$, $F \in C^1$ ist $|\lambda| < 1$ für alle $\lambda \in \sigma(F'(\xi_0))$. Gilt $|\lambda| > 1$ für ein $\lambda \in \sigma(F'(\xi_0))$, so ist ξ_0 instabil.
- ξ_0 heißt *hyperbolischer Fixpunkt*, falls $|\lambda| \neq 1$ für alle $\lambda \in \sigma(F'(\xi_0))$ und $F'(\xi_0)$ invertierbar ist.

4.3 Monodromiematrix

Wir untersuchen jetzt die Stabilität periodischer Orbits mit Hilfe der Poincaré-Abbildung. Sei also $\gamma(\xi_0) = \{\bar{x}(t, \xi_0); t \in \mathbb{R}\}$ ein T -periodischer Orbit von $x' = f(x)$. Dann folgt durch Differentiation:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \xi} \bar{x}(t, \xi_0) &= \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial t} \bar{x}(t, \xi_0) = \frac{\partial}{\partial \xi} f(\bar{x}(t, \xi_0)) = f'(\bar{x}(t, \xi_0)) \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \bar{x}(t, \xi_0), \quad t \in \mathbb{R}, \\ \frac{\partial}{\partial \xi} \bar{x}(0, \xi_0) &= \frac{\partial}{\partial \xi} \xi_0 = I_N, \end{aligned} \quad (\text{Variationsgleichungen})$$

d.h. $Y_0(t) = \frac{\partial}{\partial \xi} \bar{x}(t, \xi_0)$ ist die normierte Hauptfundamentalmatrix des T -periodischen linearen Problems

$$y' = f'(\bar{x}(t, \xi_0)) \cdot y = A(t) \cdot y \quad \text{mit } A(t) = A(t + T).$$

Definition 4.8. Sei $Y_0(t)$ die Hauptfundamentalmatrix der Variationsgleichungen zu einem T -periodischen Orbit $\gamma(\xi_0)$. Dann heißt $Y_0(T)$ *Monodromiematrix* zum Orbit $\gamma(\xi_0)$ und ihre Eigenwerte heißen *Floquet-Multiplikatoren*.

Bemerkung 4.9. Die Monodromiematrix kann sich ändern, wenn wir den Orbit statt bei ξ_0 bei $\xi_\tau = \bar{x}(\tau, \xi_0)$, $\tau \in (0, T]$ verankern. Dann lauten die Variationsgleichungen

$$y' = f'(\bar{x}(t, \xi_\tau))y = f'(\bar{x}(t + \tau, \xi_0))y = A(t + \tau)y.$$

Dieses System hat die Hauptfundamentalmatrix

$$Y_\tau(t) = Y_0(t + \tau)Y_0(\tau)^{-1}, \quad (4.1)$$

denn

$$\begin{aligned} Y_\tau(0) &= Y_0(\tau)Y_0(\tau)^{-1} = I, \\ Y'_\tau(t) &= Y_0(t + \tau)'Y_0(\tau)^{-1} = A(t + \tau)Y_0(t + \tau)Y_0(\tau)^{-1} \\ &= A(t + \tau)Y_\tau(t), \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Wegen der T -Periodizität von $A(t)$ ist $Y_T(t) = Y_0(t)$, also folgt mit (4.1)

$$Y_0(t) = Y_T(t) = Y_0(t + T)Y_0(T)^{-1} \Leftrightarrow Y_0(t)Y_0(T) = Y_0(t + T).$$

Wir erhalten also mit (4.1):

$$Y_\tau(T) = Y_0(\tau + T)Y_0(\tau)^{-1} = Y_0(\tau)Y_0(T)Y_0(\tau)^{-1},$$

d.h. die Monodromiematrizen $Y_0(T)$ und $Y_\tau(T)$ sind ähnlich. Die Floquet-Multiplikatoren sind also unabhängig von der Auswahl des Punktes ξ_τ .

4.4 Stabilitätsanalyse periodischer Orbits

Wir differenzieren jetzt die Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}\bar{x}(t, \xi_0) = f(\bar{x}(t, \xi_0)), \quad t \in \mathbb{R}$$

nach t und erhalten

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} \bar{x}(t, \xi_0) = \frac{\partial}{\partial t} f(\bar{x}(t, \xi_0)) = f'(\bar{x}(t, \xi_0)) \frac{\partial}{\partial t} \bar{x}(t, \xi_0).$$

Die Funktion $y(t) = \frac{\partial}{\partial t} \bar{x}(t, \xi_0) = f'(\bar{x}(t, \xi_0)) y(t)$ ist also eine Lösung der Variationsgleichungen. Sie lässt sich daher schreiben als

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{x}(t, \xi_0) = y(t) = Y_0(t)y(0).$$

Mit $v_1 := \frac{\partial}{\partial t} \bar{x}(0, \xi_0) = f'(\xi_0)$ folgt damit

$$Y_0(T)v_1 = y(T) = f'(\bar{x}(T, \xi_0)) = f'(\xi_0) = v_1.$$

Die Monodromiematrix hat also immer den Eigenwert 1 mit zugehörigem Eigenvektor $v_1 = f'(\xi_0)$.

Satz 4.10 (ohne Beweis). Sei $\gamma(\xi_0)$ ein T -periodischer Orbit von $x' = f(x)$ mit $Y_0(T) = \frac{\partial}{\partial \xi_0} \bar{x}(T, \xi_0)$ die zugehörige Monodromiematrix. Dann gilt

- i) Ist 1 algebraisch einfacher Eigenwert von $Y_0(T)$ und gilt $|\lambda| < 1$ für alle übrigen Floquet-Multiplikatoren λ , so ist der periodische Orbit stabil.
- ii) Existiert ein Eigenwert (Floquet-Multiplikator) von $Y_0(T)$ mit $|\lambda| > 1$, so ist $\gamma(\xi_0)$ instabil.

Definition 4.11. Der periodische Orbit $\gamma(\xi_0)$ heißt *hyperbolisch*, falls 1 algebraisch einfacher Floquet-Multiplikator ist, und falls $|\lambda| \neq 1$ für alle übrigen Floquet-Multiplikatoren λ von $\gamma(\xi_0)$ gilt.

Bemerkung 4.12. Eigentlich müssten wir für den Nachweis der Stabilität die Eigenwerte von $P'(\xi_0)$, P Poincaré-Abbildung zum Orbit $\gamma(\xi_0)$, untersuchen. Es lässt sich aber zeigen, dass die Eigenwerte von $P'(\xi_0)$ und $Y_0(T)$ sich nur um den trivialen Floquet-Multiplikator 1 unterscheiden.

Bemerkung 4.13. $\gamma(\xi_0)$ ist hyperbolischer periodischer Orbit genau dann, wenn ξ_0 hyperbolischer Fixpunkt der Poincaré-Abbildung ist.

Beispiel 4.14. Wir betrachten wieder

$$\begin{aligned}x_1' &= \lambda x_1 - x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) \\x_2' &= x_1 + \lambda x_2 - x_2(x_1^2 + x_2^2)\end{aligned}$$

mit $\lambda \in \mathbb{R}$ Parameter. Für $\lambda > 0$ hat dieses System die periodische Lösung

$$\bar{x}(t, (1, 0)) = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda} \cos(t) \\ \sqrt{\lambda} \sin(t) \end{pmatrix}$$

mit Periode 2π . Die Variationsgleichungen lauten dann

$$y'(t) = \begin{pmatrix} -2\lambda \cos^2(t) & -1 - \lambda \sin(2t) \\ 1 - \lambda \sin(2t) & -2\lambda \sin^2(t) \end{pmatrix} y(t)$$

und die Hauptfundamentalmatrix berechnet sich zu

$$Y(t) = \begin{pmatrix} \exp(-\lambda t) \cos(t) & -\sin(t) \\ \exp(-\lambda t) \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}.$$

Für $t = T = 2\pi$ erhalten wir

$$Y(2\pi) = \begin{pmatrix} \exp(-2\pi\lambda) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit den Floquet-Multiplikatoren $m_1 = 1$ und $m_2 = \exp(-2\pi\lambda)$. Also ist der periodische Orbit $\bar{x}(t, (1, 0))$ asymptotisch stabil.

5 Berechnung periodischer Lösungen

5.1 Skalierung der Periode und Phasenbedingung

Vorgelegt sei

$$\begin{aligned} x' &= f(x), \quad f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N), \\ \Omega &\subset \mathbb{R}^N \text{ offen mit Lösungsfluss } \bar{x}(t, \xi) \in C^1(\mathcal{D}, \Omega) \\ \mathcal{D} &= \{(t, \xi) \in \mathbb{R} \times \Omega; t \in J(\xi)\}. \end{aligned}$$

Es sei $\bar{x}(t, \xi)$ eine periodische Lösung, d.h. es ist $J(\xi) = \mathbb{R}$ und es existiert ein $T > 0$ mit $\bar{x}(t + T, \xi) = \bar{x}(t, \xi)$ und $\bar{x}(t, \xi) \neq \xi$ für $t \in (0, T)$.

Zur Berechnung periodischer Lösungen geht man wie folgt vor. Betrachte

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} v(\tau) &= f(v(\tau)), \quad \tau > 0 \\ v(T) &= v(0) \end{aligned}$$

mit der unbekanntem Periode $T > 0$.

Wir skalieren jetzt die Zeit $\tau := Tt$, $u(t) = v(Tt)$ und erhalten

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt}(t) &= \frac{d}{dt} v(Tt) = \frac{dv}{d\tau}(Tt)T = f(v(Tt))T = Tf(u(t)) \\ u(1) - u(0) &= v(T) - v(0) = 0 \end{aligned}$$

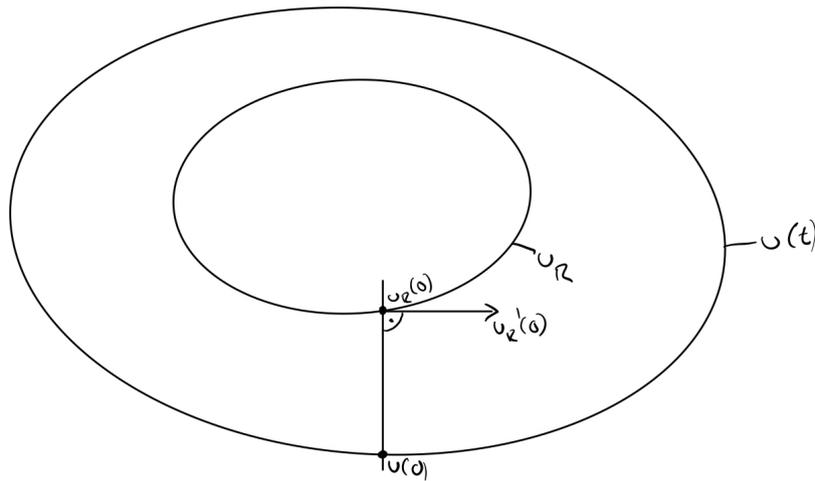
Sei jetzt $\bar{u}(t, u_0, T)$ der Lösungsfluss von $u' = Tf(u)$, $u(0) = u_0$. Dann gilt $\bar{u}(t, u_0, T) = \bar{x}(tT, u_0)$, denn

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{x}(tT, u_0) = T\bar{x}'(tT, u_0) = Tf(\bar{x}(tT, u_0)), \quad \bar{x}(0, u_0) = u_0.$$

Es bleibt aber folgendes zu bedenken:

Ist $\tilde{u}(t)$ eine Lösung von $u' = Tf(u)$, $u(1) - u(0) = 0$, so auch $\tilde{u}(t + t_0)$ für jedes $t_0 \in \mathbb{R}$. Man benötigt also eine zusätzliche Bedingung („die Phasenbedingung“) um aus der einparametrischen Lösungsschar $\tilde{u}(t + t_0)$, $t_0 \in \mathbb{R}$ eine auszuwählen. Eine Möglichkeit, diese Auswahl zu treffen, geht mittels einer 1-periodischen Referenzfunktion $u_R(t)$. Zur Fixierung der Phase wählt man z.B:

$$u(0) - u_R(0) \perp u_R'(0) \quad \text{„Poincaré-Phasenbedingung“}$$



Ein vollständiges System zur Berechnung T -periodischer Orbits von $x' = f(x)$ lautet also

$$\begin{aligned} u' - Tf(u) &= 0 \\ u(1) - u(0) &= 0 \\ (u(0) - u_R(0))^\top u'_R(0) &= 0 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Allgemeiner lässt sich die 3-te Gleichung in (5.1) durch eine Bedingung der Form $p(u) = 0$ ersetzen. Als Alternativen zur Poincaré-Phasenbedingung bieten sich an:

- $p(u) = u_i(0) - \alpha = 0$, für ein $i \in \{1, \dots, N\}$, „Fixierung einer Komponente“
- $p(u) = \int_0^1 (u(t) - u_R(t))^\top u'(t) dt = 0$, „Integrale Phasenbedingung“.

Funktionalanalytisch hat (5.1) die Form $F(u, T) = 0$ mit $F : C^1([0, 1], \mathbb{R}^N) \times \mathbb{R} \rightarrow C([0, 1], \mathbb{R}^N) \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$.

$$F(u, T)(t) = \begin{pmatrix} u'(t) - Tf(u(t)) \\ u(1) - u(0) \\ (u(0) - u_R(0))^\top u'_R(0) \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Bemerkung 5.1. Das Gleichungssystem (5.1) ist äquivalent zu dem endlichdimensionalen System

$$G(u, T) = \begin{pmatrix} \bar{u}(1, u, T) - u \\ (u - u_R(0))^\top u'_R(0) \end{pmatrix} = 0 \tag{5.2}$$

mit $G : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$. Numerisch ist also entweder die Randwertaufgabe (5.1) oder das Gleichungssystem (5.2) zu lösen.

Bemerkung 5.2. In MATCONT wird (5.1) mit der integralen Phasenbedingung statt der Poincaré-Phasenbedingung gelöst. Prinzipiell sieht das wie folgt aus:

Gitter: $\Omega_n = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = 1\}$, $\Delta t_j = t_j - t_{j-1}$, $j = 1, \dots, n$.

Seien $c_i \in [0, 1]$, $i = 1, \dots, m$ die Knoten des Kollokationspolynoms. Erhalte dann die Kollokationspunkte

$$z_{ij} = t_{j-1} + c_i \Delta t_j, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n.$$

Setze

$$P_n^m = \{p_u \in C([0, 1], \mathbb{R}^N), p_u|_{[t_{j-1}, t_j]} \in P^m\},$$

wobei P^m den Raum aller Polynome mit Grad $\leq m$ bezeichnet. Die Kollokationsmethode für (5.1) besteht nun darin, $p_u \in P_n^m$, $T \in \mathbb{R}$ zu finden mit

$$\begin{aligned} p'_u(z_{ji}) &= Tf(p_u(z_{ji})), \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n \\ p_u(1) - p_u(0) &= 0 \\ (p_u(0) - u_R(0))^\top u'_R(0) &= 0. \end{aligned}$$

Im Fall von Gauss-Polynomen ist die Methode konvergent von der Ordnung $2m$, falls die Lösung $(2m + 1)$ -mal differenzierbar ist.

5.2 Das Schießverfahren

Wir beschäftigen uns im Folgenden mit dem Lösen des Systems

$$G(u, T) = \begin{pmatrix} \bar{u}(1, u, T) - u \\ (u - u_R(0))^\top u'_R(0) \end{pmatrix} = 0 \quad (5.3)$$

Der Übergang von (5.1) zu (5.3) entspricht gerade der Anwendung des Schießverfahrens auf (5.1). Ist nun $\bar{x}(t, u_0)$ eine T_0 -periodische Lösung von $x' = f(x)$, so ist $\bar{u}(t, u_0, T_0) = \bar{x}(tT_0, u_0)$ eine Lösung von $u' = Tf(u)$ und (u_0, T_0) ist eine Lösung von (5.3).

Satz 5.3. Sei $\bar{x}(t, u_0)$ eine T_0 -periodische Lösung von $x' = f(x)$, $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$, und 1 sei algebraisch einfacher Floquet-Multiplikator. Dann gilt

a) $(u_0, T_0) \in \Omega \times \mathbb{R}$ reguläre Lösung von

$$G(u, T) = \begin{pmatrix} G_1(u, T) \\ G_2(u, T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{u}(1, u, T) - u \\ (u - u_R(0))^\top u'_R(0) \end{pmatrix} = 0,$$

falls $u'_R(0)^\top f(u_0) \neq 0$. Hierbei ist $\bar{u}(t, u, T) = \bar{x}(tT, u)$ und u_R ist eine 1-periodische Referenzfunktion.

b) $\frac{\partial G_1}{\partial u}(u_0, T_0) + I_N = Y_0(T_0)$ wobei $Y_0(T_0)$ die Monodromiematrix der T_0 -periodischen Lösung $\bar{x}(t, u_0)$ bezeichnet.

Beweis: a)

$$DG(u, T) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial u} \bar{u}(1, u, T) - I & \frac{\partial}{\partial T} \bar{u}(1, u, T) \\ u'_R(0)^\top & 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{u}(t, \tilde{u}, T) \text{ löst } \begin{cases} \tilde{u}' = Tf(\tilde{u}), \\ \tilde{u}(0) = \tilde{u} \end{cases} .$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial u}(t, u, T) \text{ löst } \begin{cases} V'(t) = Tf'(\bar{u}(t, u, T))V(t), \\ V(0) = I \end{cases} . \quad (5.4)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial T}(t, u, T) \text{ löst } \begin{cases} w'(t) = Tf'(\bar{u}(t, u, T))w(t) + f(\bar{u}(t, u, T)) \\ w(0) = 0 \end{cases} . \quad (5.5)$$

5 Berechnung periodischer Lösungen

Mit der Hauptfundamentalmatrix $V(t)$ von (5.4) erhalten wir

$$DG(u_0, T_0) = \begin{pmatrix} V(1) - I & \frac{\partial}{\partial T} \bar{u}(1, u_0, T_0) \\ u'_R(0)^\top & 0 \end{pmatrix}.$$

Für $\frac{\partial}{\partial T} \bar{u}(1, u_0, T_0)$ erhalten wir mit der Variation der konstanten Formel aus (5.5) sofort

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial T}(t, u_0, T_0) = \int_0^t V(t)V(s)^{-1} \underbrace{f(\bar{u}(s, u_0, T_0))}_{=\frac{\partial}{\partial t} \bar{u}(s, u_0, T_0) \frac{1}{T_0}} ds.$$

Dies liefert für $t = 1$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial T}(1, u_0, T_0) &= V(1) \int_0^1 V(s)^{-1} \frac{1}{T_0} \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \bar{u}(s, u_0, T_0)}_{=V(s) \frac{\partial}{\partial t} \bar{u}(0, u_0, T_0)} ds \\ &= V(1) \int_0^1 \frac{1}{T_0} \frac{\partial}{\partial t} \bar{u}(0, u_0, T_0) ds \\ &= \frac{1}{T_0} V(1) \frac{\partial}{\partial t} \bar{u}(0, u_0, T_0) \\ &= \frac{1}{T_0} \frac{\partial}{\partial t} \bar{u}(1, u_0, T_0) \\ &= \frac{1}{T_0} \frac{\partial}{\partial t} \bar{u}(0, u_0, T_0) \\ &= \frac{1}{T_0} T_0 f(u_0) = f(u_0) \end{aligned}$$

Man beachte hierzu

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial T} \bar{u}(t, u_0, T_0) &= \frac{\partial}{\partial t} (T_0 f(\bar{u}(t, u_0, T_0))) \\ &= T_0 f'(\bar{u}(t, u_0, T_0)) \frac{\partial \bar{u}}{\partial t}(t, u_0, T_0), \quad \text{d.h.} \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial t}(t, u_0, T_0) &= V(t) \frac{\partial \bar{u}}{\partial t}(0, u_0, T_0) \\ \Leftrightarrow T_0 f(\bar{u}(t, u_0, T_0)) &= V(t) T_0 f(u_0). \end{aligned}$$

Damit folgt für $t = 1$

$$\begin{aligned} V(1) T_0 f(u_0) &= T_0 f(\bar{u}(1, u_0, T_0)) \\ &= T_0 f(\bar{u}(0, u_0, T_0)) = T_0 f(u_0) \end{aligned}$$

da $\bar{u}(t, u_0, T_0)$ eine 1-periodische Funktion ist. Also gilt $V(1)f(u_0) = f(u_0)$. Da nun 1 algebraisch einfacher Floquet-Multiplikator ist, gilt

$$N(V(1) - I) = \text{span}\{f(u_0)\}$$

und

$$DG(u_0, T_0) = \begin{pmatrix} V(1) - I & f(u_0) \\ u'_R(0)^\top & 0 \end{pmatrix}.$$

Gemäß des Ränderungslemma (Aufgabe 1a, ii, Blatt 4), ist $DG(u_0, T_0)$ invertierbar, falls $f(u_0) \notin R(V(1) - I)$, $u'_R(0) \notin R(V(1) - I)^\top$.

Mit $R((V(1) - I)^\top) = N(V(1) - I)^\perp = \text{span}\{f(u_0)\}^\perp$ folgt sofort $u'_R(0) \notin R((V(1) - I)^\top)$, da $f(u_0)^\top u'_R(0) \neq 0$.²

Annahme: Sei $f(u_0) \in R(V(1) - I)$. Dann gibt es ein $w \in \mathbb{R}^N$ mit $(V(1) - I)w = f(u_0) \neq 0$ und somit ist w ein Hauptvektor erster Stufe zum Eigenwert 1, denn

$$(V(1) - I)^2 w = (V(1) - I)f(u_0) = 0,$$

d.h. Widerspruch zu 1 algebraisch einfacher Floquet-Multiplikator.

Somit gilt $f(u_0) \notin R(V(1) - I)$ und $DG(u_0, T_0)$ ist invertierbar.

b) Aus a) folgt:

$$\frac{\partial G_1}{\partial u}(u_0, T_0) = V(1) - I \quad (5.6)$$

mit $V(t)$ Lösung von

$$V'(t) = T f'(\bar{u}(t, u, T))V(t), \quad V(0) = I.$$

Ist $Y_0(t)$ die Lösung von

$$Y_0'(t) = T f'(\bar{x}(t, u_0))Y_0(t), \quad Y_0(0) = I,$$

so folgt $V(t) = Y_0(tT)$, denn

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} Y_0(tT) &= T Y_0'(tT) \\ &= T f'(\bar{x}(tT, u_0))Y_0'(tT) \\ &= T f'(\bar{u}(t, T, u_0))Y_0'(tT), \quad t \geq 0, \quad Y_0(0) = I. \end{aligned}$$

Somit folgt

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_1}{\partial u}(u_0, T_0) &= V(1) - I = Y_0(T) - I \\ &\Leftrightarrow Y_0(T) = I + \frac{\partial G_1}{\partial u}(u_0, T_0). \end{aligned}$$

□

²Für $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ gilt $N(A) = R(A^\top)$. *Beweis:* Sei $u = A^\top w \in R(A^\top)$, sei $v \in N(A)$. Dann gilt $\langle u, v \rangle = \langle A^\top w, v \rangle = \langle w, \underbrace{Av}_{=0} \rangle = 0$.

Bemerkung 5.4. • Konvergiert also das Newtonverfahren zur Lösung von $G(u, T) = 0$, so erhält man die Monodromiematrix $Y_0(T)$ gemäß

$$Y_0(T) = I + \frac{\partial G_1}{\partial u}(u_0, T_0)$$

und man kann die Stabilität der periodischen Lösung $\bar{x}(tu)$, $0 \leq t \leq T_0$ sofort bestimmen.

- Zur Bestimmung von

$$DG(u, T) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial u} \bar{u}(1, u, T) - I & \frac{\partial}{\partial T} \bar{u}(1, u, T) \\ u'_R(0)^\top & 0 \end{pmatrix}$$

ist das gekoppelte System

$$\begin{aligned} u' &= Tf(u), \quad u(0) = \tilde{u} \\ V'(t) &= Tf'(u)V(t), \quad V(0) = I \\ w'(t) &= Tf'(u)w + f(u), \quad w(0) = 0 \end{aligned}$$

für $0 \leq t \leq 1$ zu lösen.

5.3 Periodische Lösungen parameterabhängiger Systeme

Betrachte nun den parameterabhängigen Fall

$$x' = f(x, \lambda), \quad f \in C^1(\Omega \times \Lambda, \mathbb{R}^N)$$

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen, $\Lambda \subset \mathbb{R}^p$ offen mit Lösungsfluss

$$\begin{aligned} \bar{x}(t, \xi, \lambda) &\in C^1(\mathcal{D}(\Lambda), \Omega) \\ \mathcal{D} &= \{(t, \xi, \lambda) \in \mathbb{R} \times \Omega \times \Lambda; t \in J(\xi, \lambda)\}. \end{aligned}$$

Ohne Einschränkung gelte $p = 1$.

Es sei $\bar{x}(t, \xi(s), \lambda(s))$ eine $T(s)$ periodische Lösung von $x' = f(x, \lambda(s))$, $s \in I$. Durch Skalierung der Zeit erhält man wieder die Dgl.

$$u' = T(s)f(u, \lambda(s)), \quad u(0) = u_0$$

mit Lösungsfluss $\bar{u}(t, u_0, T(s), \lambda(s)) = \bar{x}(tT(s), u_0, \lambda)$. Also gilt $G(u(s), T(s), \lambda(s)) = 0$ für

$$G(u, T, \lambda) := \begin{pmatrix} \bar{u}(t, u, T, \lambda) - u \\ (u(0) - u_R(0))^\top u'_R(0) \end{pmatrix}$$

und $u(s) = \xi(s)$. Ferner ist $(u(s), T(s), \lambda(s))$ eine reguläre Lösung von $G(u, T, \lambda) = 0$, falls 1 algebraisch einfacher Floquet-Multiplikator der 1-periodischen Lösung $\bar{u}(t, u(s), T(s), \lambda(s))$ ist.

5 Berechnung periodischer Lösungen

Man berechnet nun den Zweig $(u(s), T(s), \lambda(s))$, $s \in I$ von $G(u, T, \lambda) = 0$ durch Fortsetzung nach der Bogenlänge. Als Referenzfunktion $u_R(t)$ in der Poincaré-Phasenbedingung wählt man den jeweils zuletzt berechneten Orbit.

Sei also (u_0, T_0, λ_0) eine reguläre Lösung von $G(u, T, \lambda) = 0$. Ferner sei (u'_0, T'_0, λ'_0) der auf 1 normierte Tangentialvektor. Man löst dann das System

$$H(u, T, \lambda) = \begin{pmatrix} G(u, T, \lambda) \\ (u - u_0)^\top u'_0 + (T - T_0)T'_0 + (\lambda - \lambda_0)\lambda'_0 - \Delta s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

für $\Delta s > 0$ geeignet z.B. mit dem Newtonverfahren. Dies konvergiert gemäß Satz 3.4 lokal quadratisch an jeder regulären Lösung (u_1, T_1, λ_1) von $G(u, T, \lambda) = 0$. Nach Satz 5.3 ist hierfür hinreichend, dass 1 ein algebraisch einfacher Floquet-Multiplikator der T_1 -periodischen Lösung $\bar{x}(t, u_1, \lambda_1)$, $t \in \mathbb{R}$ ist. Den neuen Tangentialvektor (u'_1, T'_1, λ'_1) berechnet man durch Lösen von

$$DH(u_1, T_1, \lambda_1) \cdot \begin{pmatrix} \bar{u}'_1 \\ \bar{T}'_1 \\ \bar{\lambda}'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und Normierung

$$(u'_1, T'_1, \lambda'_1) = \frac{(\bar{u}'_1, \bar{T}'_1, \bar{\lambda}'_1)}{\|(\bar{u}'_1, \bar{T}'_1, \bar{\lambda}'_1)\|_2}.$$

Bemerkung 5.5. • Ist das Newtonverfahren zum Lösen von $H(u, T, \lambda) = 0$ zu aufwendig, so muss ein ableitungsfreies Verfahren (z.B. Fixpunktiteration) benutzt werden. Dabei wird die Tangente (u'_0, T'_0, λ'_0) durch die Sekante

$$S = \frac{(u_0 - u_{-1}, T_0 - T_{-1}, \lambda_0 - \lambda_{-1})}{\|(u_0 - u_{-1}, T_0 - T_{-1}, \lambda_0 - \lambda_{-1})\|_2}$$

ersetzt.

Ein offenes Problem ist aber, eine $T(s_0)$ -periodische Startlösung von $x' = f(x, \lambda(s_0))$ zu bekommen, d.h. (u_0, T_0, λ_0) mit $G(u_0, T_0, \lambda_0) = 0$. An einer stabilen periodischen Lösung lassen sich geeignete Approximationen für $T(s_0), u(s_0), \lambda(s_0)$ bestimmen, welche dann mit dem Newtonverfahren zur Lösung von

$$\begin{pmatrix} \bar{u}(t, u, T, \lambda(s_0)) - u \\ u_i(u) - \alpha \end{pmatrix} = 0, \quad i \in \{1, \dots, N\}$$

festgezurt werden können.

Eine Alternative hierzu ist die Berechnung periodischer Lösungs Zweige, welche an einem Hopf-Punkt entstehen. Programme wie MATCONT können an derartigen Punkten starten und die von dort ausgehenden Lösungs Zweige periodischer Orbits verfolgen.

6 Stabile und instabile Mannigfaltigkeiten

6.1 Stabile und instabile Mannigfaltigkeiten stationärer Punkte

Vorgelegt seien das kontinuierliche dynamische System

$$\begin{aligned} x' &= f(x), \quad f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N), \quad \text{Lösung } \bar{x}(t, x), \\ \xi &\in \Omega \text{ mit } f(\xi) = 0, \quad \xi \text{ hyperbolisch,} \end{aligned} \quad (6.1)$$

sowie das diskrete dynamische System

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= F(x_n), \quad F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N), \quad \text{Lösung } \bar{x}(t, x), \\ \xi &\in \Omega \text{ mit } F(\xi) = \xi, \quad \xi \text{ hyperbolisch.} \end{aligned} \quad (6.2)$$

Die zugehörigen stabilen und instabilen Unterräume X_s und X_u ergeben sich

- i) im kontinuierlichen Fall (6.1): $B = f'(\xi)$, $BS = S\Lambda$ mit $S \in \mathbb{R}^{N \times N}$ invertierbar und

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_s & 0 \\ 0 & \Lambda_u \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} \operatorname{Re}(\lambda) &< 0 \quad \forall \lambda \in \sigma(\Lambda_s) \\ \operatorname{Re}(\lambda) &> 0 \quad \forall \lambda \in \sigma(\Lambda_u) \end{aligned}$$

sowie der Partitionierung $S = (S_s, S_u)$, $S_s \in \mathbb{R}^{N \times N_s}$, $S_u \in \mathbb{R}^{N \times N_u}$, $N_u + N_s = N$ und den invarianten Unterräumen $X_\kappa = S_\kappa \mathbb{R}^{N_\kappa}$, $\kappa \in \{s, u\}$.

- ii) im diskreten Fall (6.2):

$B = F'(\xi)$, $BS = S\Lambda$ mit $S \in \mathbb{R}^{N \times N}$ invertierbar und

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_s & 0 \\ 0 & \Lambda_u \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} |\lambda| &< 1 \quad \forall \lambda \in \sigma(\Lambda_s) \\ |\lambda| &> 1 \quad \forall \lambda \in \sigma(\Lambda_u) \end{aligned}$$

sowie $S = (S_s, S_u)$, $X_\kappa = S_\kappa \mathbb{R}^{N_\kappa}$, $\kappa \in \{s, u\}$.

Der hyperbolische Fixpunkt bzw. stationäre Punkt ξ heißt *Senke*, falls $\dim(X_u) = 0$, *Quelle*, falls $\dim(X_s) = 0$ und *Sattel*, falls $\dim(X_u) > 0$ und $\dim(X_s) > 0$.

Wir wollen nun die Dynamik diskreter und kontinuierlicher dynamischer Systeme in der Nähe von hyperbolischen Fixpunkten bzw. stationären Punkten genauer verstehen.

Definition 6.1. a) Sei $\xi \in \Omega$ hyperbolischer stationärer Punkt von $x' = f(x)$, $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ und sei V eine Umgebung von ξ in Ω . Dann heißen

$$\begin{aligned} W_s^V(\xi) &= \left\{ x_0 \in V; t^+(x_0) = \infty, \bar{x}(t, x_0) \in V \text{ für } t \geq 0 \text{ und } \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{x}(t, x_0) = \xi \right\} \\ W_u^V(\xi) &= \left\{ x_0 \in V; t^-(x_0) = -\infty, \bar{x}(t, x_0) \in V \text{ für } t \leq 0 \text{ und } \lim_{t \rightarrow -\infty} \bar{x}(t, x_0) = \xi \right\} \end{aligned}$$

die stabile bzw. instabile Mannigfaltigkeit des stationären Punktes bzgl. V .

b) Sei $\xi \in \Omega$ hyperbolischer Fixpunkt von $x_{n+1} = F(x_n)$, $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ und sei V Umgebung von ξ . Dann nennt man

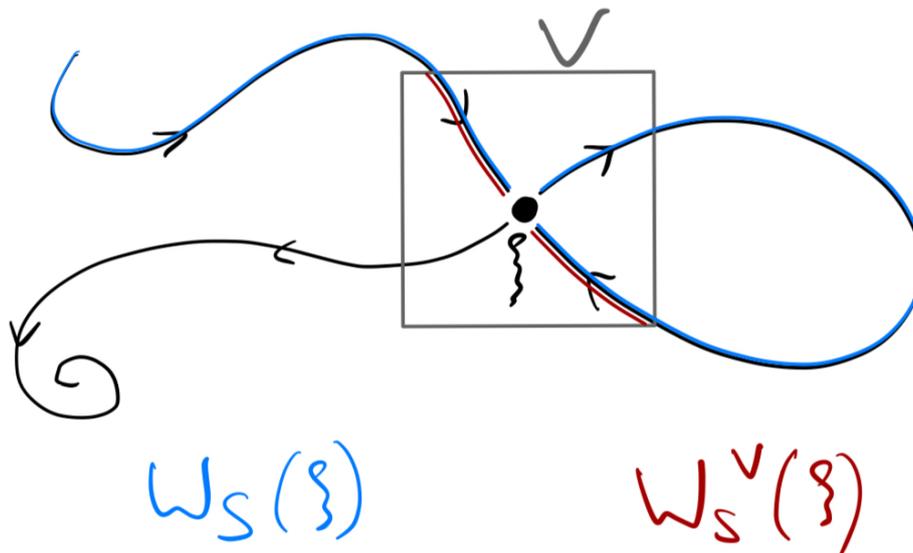
$$W_s^V(\xi) = \{x_0 \in V; (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset V, x_{n+1} = F(x_n) \text{ und } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi\}$$

$$W_u^V(\xi) = \{x_0 \in V; (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset V, x_{n+1} = F(x_n) \text{ und } \lim_{n \rightarrow -\infty} x_n = \xi\}$$

stabile bzw. instabile Mannigfaltigkeit des Fixpunktes ξ bzgl. V .

Bemerkung 6.2. • Definition 6.1 unterstellt, dass die Mengen $W_u^V(\xi)$, $W_s^V(\xi)$ tatsächlich Mannigfaltigkeiten sind, was noch nachzuweisen ist.

- Aus Definition 6.1 folgt unmittelbar, dass die stabilen Mannigfaltigkeiten positiv und die instabilen Mannigfaltigkeiten negativ invariant sind.
Sei dazu $z = \bar{x}(t_0, x_0)$, $x_0 \in W_s^V(\xi)$, $t_0 > 0$. Dann ist $t^+(z) = \infty$, $\bar{x}(t, z) = \bar{x}(t, \bar{x}(t_0, x_0)) = \bar{x}(t+t_0, x_0) \in V$ und $\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{x}(t, z) = \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{x}(t+t_0, x_0) = \xi$.
- Die Abhängigkeit der Mengen $W_s^V(\xi)$ und $W_u^V(\xi)$ von der gewählten Umgebung V von ξ ist wichtig. Im Fall $V = \Omega$ spricht man auch von der globalen stabilen bzw. instabilen Mannigfaltigkeiten und schreibt $W_s(\xi) = W_s^\Omega(\xi)$, $W_u(\xi) = W_u^\Omega(\xi)$. Es gilt im Allgemeinen jedoch nicht $W_s^V(\xi) = V \cap W_s(\xi)$. Betrachte hierzu das Beispiel



6.2 Darstellung lokaler stabiler und instabiler Mannigfaltigkeiten

Satz 6.3 (Darstellungssatz).

1. Sei ξ hyperbolischer stationärer Punkt des dynamischen Systems $x' = f(x)$, $f \in C^k(\Omega, \mathbb{R}^N)$, $k \geq 1$ und seien $X_s, X_u \subset \mathbb{R}^N$ stabiler und instabiler Unterraum von $B = f'(\xi)$. Dann gibt es Nullumgebungen $V_s \subset X_s, V_u \subset X_u$ und eine Funktion $p \in C^k(V_s, V_u)$, so dass $p(0) = 0, p'(0) = 0$ gilt und die lokale stabile Mfk. $W_s^V(\xi)$ mit $V = \xi + V_s \oplus V_u$ die folgende Darstellung besitzt:

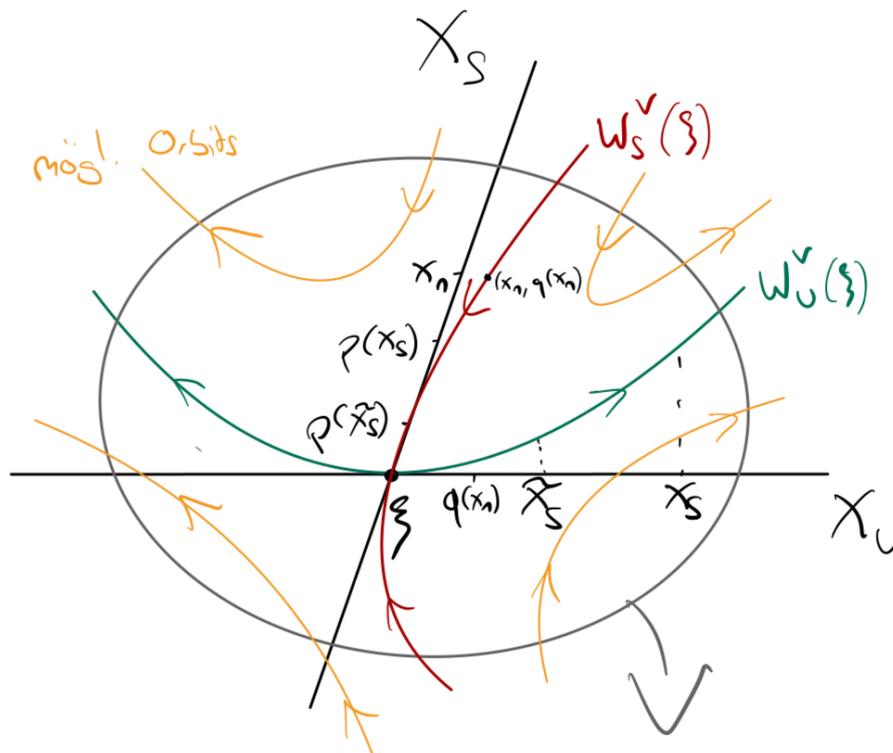
$$W_s^V(\xi) = \{\xi + x_s + p(x_s); x_s \in V_s\}. \quad (6.3)$$

Ebenso gibt es ein $q \in C^k(V_u, V_s)$ mit $q(0) = 0, q'(0) = 0$ und

$$W_u^V(\xi) = \{\xi + x_u + q(x_u); x_u \in V_u\}. \quad (6.4)$$

2. Sei ξ hyperbolischer Fixpunkt von $x_{n+1} = F(x_n)$, $F \in C^k(\Omega, \mathbb{R}^N)$, $k \geq 1$. Dann besitzen die zugehörigen lokalen stabilen und instabilen Mannigfaltigkeiten $W_s^V(\xi)$ und $W_u^V(\xi)$ bei geeigneter Wahl von V die Darstellungen (6.3) und (6.4). X_s bzw. X_u sind dabei die invarianten Unterräume von $F'(\xi)$ zu Eigenwerten mit Betrag größer bzw. kleiner 1.

Bemerkung 6.4. • Gemäß Satz (6.3) sind $W_s^V(\xi), W_u^V(\xi)$ für V geeignet als Graphen glatter Funktionen darstellbar und somit Mannigfaltigkeiten im mathematischen Sinne.



- Wegen $p'(0) = 0$ und $q'(0) = 0$ sind X_s und X_u die Tangentialräume an $W_s^V(\xi)$ bzw. $W_u^V(\xi)$. Dies lässt sich anhand der Darstellung (6.3), (6.4) verifizieren. Sei $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow W_s^V(\xi)$ eine Kurve und $\gamma(0) = \xi$ und $\gamma'(0) = v$, d.h.

$$\begin{aligned}\gamma(\alpha) &= \xi + x_s(\alpha) + p(x_s(\alpha)), \quad x_s(\alpha) \in X_s. \\ \Rightarrow \gamma'(\alpha) &= x'_s(\alpha) + p'(x_s(\alpha)) \cdot x'_s(\alpha) \\ \gamma'(0) &= x'_s(0) + \underbrace{p'(0)}_{=0} x'_s(0) = x'_s(0) \in X_s,\end{aligned}$$

d.h. $T_s W_s^V(\xi) \subset X_s$.

Ist andererseits $v \in X_s$ gegeben, so wähle die Kurve

$$\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow W_s^V(\xi), \quad \gamma(\alpha) = \xi + x_s(\alpha) + p(x_s(\alpha)).$$

Dann gilt $\gamma(0) = \xi$ und $\gamma'(0) = v \in T_s W_s^V(\xi)$.

- Im Fall $X_s = \mathbb{R}^N$, $X_u = \{0\}$ (d.h. Senke) folgt $p \equiv 0$ und im Fall $X_s = \{0\}$, $X_u = \mathbb{R}^N$ (d.h. Quelle) gilt $q \equiv 0$. Somit ist für eine Senke $W_s^V(\xi)$ bzw. für eine Quelle $W_u^V(\xi)$ eine echte Umgebung von ξ in Ω .

6.3 Stabile und instabile Mannigfaltigkeiten periodischer Orbits

Eine Verallgemeinerung der Definition (6.1) auf kompakte, invariante Mengen ist

Definition 6.5. a) Sei $M \subset \Omega$ kompakt und invariant für $x' = f(x)$, $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$, und sei $V \subset \Omega$ eine Umgebung von M . Dann heißen

$$\begin{aligned}W_s^V(M) &= \left\{ x_0 \in V; t^+(x_0) = \infty, \bar{x}(t, x_0) \in V \text{ für } t \geq 0 \text{ und } \lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(\bar{x}(t, x_0), M) = 0 \right\} \\ W_u^V(M) &= \left\{ x_0 \in V; t^-(x_0) = -\infty, \bar{x}(t, x_0) \in V \text{ für } t \leq 0 \text{ und } \lim_{t \rightarrow -\infty} \text{dist}(\bar{x}(t, x_0), M) = 0 \right\}\end{aligned}$$

die stabile, bzw. instabile Menge von M bzgl. einer Umgebung V .

- b) Entsprechend heißen für $x_{n+1} = F(x_n)$, $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$, M kompakt und invariant für $x_{n+1} = F(x_n)$

$$\begin{aligned}W_s^V(M) &= \{x_0 \in V; (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset V \text{ mit } x_{n+1} = F(x_n) \text{ und } \lim_{n \rightarrow \infty} \text{dist}(x_n, M) = 0\} \\ W_u^V(M) &= \{x_0 \in V; (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset V \text{ mit } x_{n+1} = F(x_n) \text{ und } \lim_{n \rightarrow -\infty} \text{dist}(x_n, M) = 0\}\end{aligned}$$

die stabile bzw. instabile Menge von M bzgl. V .

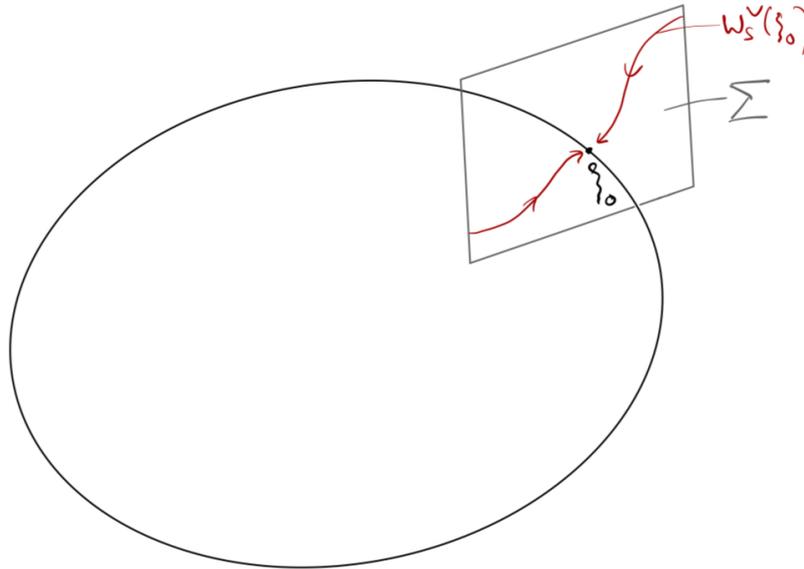
Im Folgenden betrachten wir den Fall $M = \gamma(\xi_0)$ eines hyperbolischen T -periodischen Orbits. Wir konstruieren nun die bei ξ_0 aufgehängte Poincaré-Abbildung P mit einem linearen lokalen transversalen Schnitt Σ . Dann hat das diskrete dynamische System

6 Stabile und instabile Mannigfaltigkeiten

$x_{n+1} = P(x_n)$ den hyperbolischen Fixpunkt ξ_0 . Nach (6.3) hat nun $x_{n+1} = P(x_n)$ eine lokale stabile Mannigfaltigkeit der Form

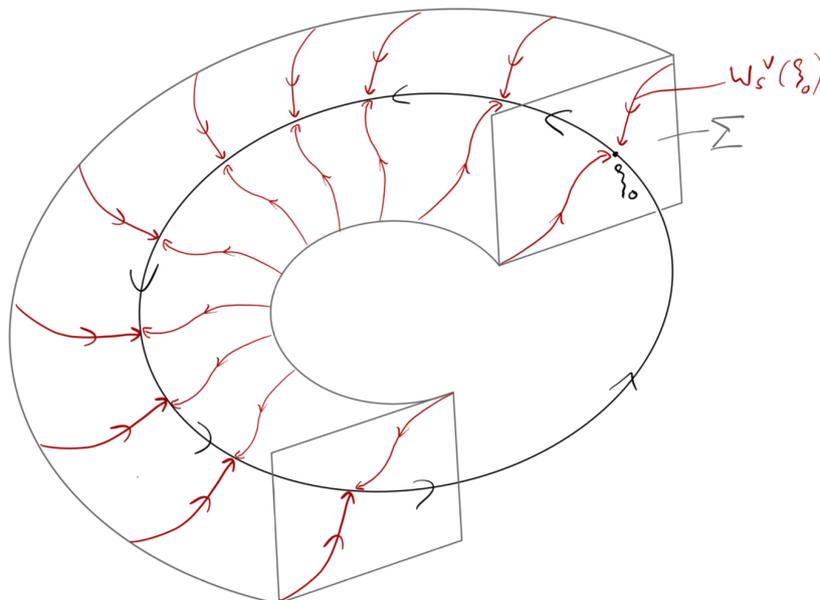
$$W_s^U(\xi_0) = \{\xi_0 + x_s + p(x_s); x_s \in U_s\}$$

mit $U = \xi_0 + (U_s \oplus U_u)$ und $U_s \subset X_s$, $U_u \subset X_u$ sowie $p \in C^k(U_s, U_u)$.



Es ist nun einleuchtend, dass sich die lokale stabile Mannigfaltigkeit des periodischen Orbits ergibt, wenn wir die lokale stabile Mannigfaltigkeit $W_s^U(\xi_0)$ des Fixpunktes ξ_0 von $x_{n+1} = P(x_n)$ einmal herumfließen lassen. Mit der Auftreffzeitfunktion $\tau : W \rightarrow \mathbb{R}$, W geeignete Umgebung von ξ_0 lautet dies

$$W_s^V(\gamma(\xi_0)) = \{\bar{x}(t, \xi_0 + x_s + p(x_s)); x_s \in U_s, 0 \leq t < \tau(\xi_0 + x_s + p(x_s))\}$$



Bemerkung 6.6. Hat der hyperbolische Fixpunkt ξ_0 von $x_{n+1} = P(x_n)$ die Dimension N_s bzw. N_u , $N_s + N_u = N - 1$, so hat die stabile Mannigfaltigkeit des hyperbolischen, periodischen Orbits $\gamma(\xi_0)$ die Dimension $N_s + 1$, die instabile Mannigfaltigkeit die Dimension $N_u + 1$. Der Schnitt dieser beiden Mannigfaltigkeiten ist der Orbit $\gamma(\xi_0)$ selbst.

7 Zentrumsmannigfaltigkeiten für dynamische Systeme und Verzweigungen

7.1 Die Zentrumsmannigfaltigkeit

Betrachte $z' = f(z)$, $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen mit Lösung $\bar{z}(t, z)$.

Es sei $f(0) = 0$ und

$$f'(0) = \begin{pmatrix} A_c & 0 \\ 0 & A_s \end{pmatrix}, \quad A_c \in \mathbb{R}^{N_c, N_c}, \quad A_s \in \mathbb{R}^{N_s, N_s},$$

$N_c + N_s = N$ mit $\operatorname{Re}(\lambda) = 0$ für alle $\lambda \in \sigma(A_c)$, $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$ für alle $\lambda \in \sigma(A_s)$. Entsprechend spalten wir $z = (x, y)$ auf und schreiben

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = z' = \begin{pmatrix} f_1(z) \\ f_2(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_c x + r_1(x, y) \\ A_s y + r_2(x, y) \end{pmatrix}$$

mit $r_i(0, 0) = 0$, $Dr_i(0, 0) = 0$, $i = 1, 2$.

Definition 7.1. i) Eine Menge $M \subset \Omega$ mit $0 \in M$ heißt lokal invariant für $z' = f(z)$, falls eine Nullumgebung V existiert mit $z \in M$, $\bar{z}(t, z) \in V$ für $t_0 < t < t_1$, $t_0 < 0 < t_1 \Rightarrow \bar{z}(t, z) \in M$ für $t_0 < t < t_1$.

ii) Eine lokal invariante Mannigfaltigkeit der Form $W_c(0) = \{(x, h(x)); x \in V_c\}$, $V_c \subset \mathbb{R}_c^N$ eine Nullumgebung mit $h(0) = 0$ und $h \in C^{k, \text{Lip}}(V_c, \mathbb{R}^{N_s})$ heißt $C^{k, \text{Lip}}$ -Zentrumsmannigfaltigkeit für $z' = f(z)$. Dabei ist

$$C^{k, \text{Lip}}(M, \mathbb{R}^N) = \{f \in C^k(M, \mathbb{R}^N); f^{(k)} \text{ ist lokal Lipschitz-beschränkt in } M\}.$$

Dann wird die Dynamik auf $W_c(0)$ beschrieben durch

$$x' = f_1(x, h(x)), \quad x \in V_c. \quad (7.1)$$

(7.1) heißt das *reduzierte System* zu $z' = f(z)$ nahe Null. Es enthält alle „interessanten Phänomene“ des Ausgangssystems.

Satz 7.2. Sei $f \in C^{k, \text{Lip}}(\Omega, \mathbb{R}^N)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen, $k \geq 1$ und sei 0 ein stationärer Punkt von $z' = f(z)$ mit

$$f'(0) = \begin{pmatrix} A_c & 0 \\ 0 & A_s \end{pmatrix}, \quad A_c \in \mathbb{R}^{N_c \times N_c}, \quad A_s \in \mathbb{R}^{N_s \times N_s}, \quad N_s + N_c = N$$

mit $\operatorname{Re}(\lambda) = 0$ für alle $\lambda \in \sigma(A_c)$, $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$ für alle $\lambda \in \sigma(A_s)$.

Dann existiert eine $C^{k, \text{Lip}}$ -Zentrumsmannigfaltigkeit, d.h. $h \in C^{k, \text{Lip}}(V_c, \mathbb{R}^{N_s})$, $W_c(0) = \{(x, h(x)); x \in V_c\}$, $V_c \subset \mathbb{R}^{N_c}$ Nullumgebung, und es gilt $h(0) = 0$, $h'(0) = 0$.

7.2 Eigenschaften der Zentrumsmannigfaltigkeit

Bemerkung 7.3. Unter den Voraussetzungen von Satz (7.2) gilt für jede dort konstruierte Zentrumsmannigfaltigkeit $W_c(0)$:

i) Sei $(\bar{x}(t), \bar{y}(t)) = (\bar{x}(t), h(\bar{x}(t)))$ eine Lösung von $z' = f(z)$ auf $W_c(0)$. Dann gilt

$$\bar{y}'(t) = (h(\bar{x}(t)))' = h'(\bar{x}(t))\bar{x}'(t)$$

d.h.

$$\begin{aligned} f_2(\bar{x}(t), h(\bar{x}(t))) &= h'(\bar{x}(t))f_1(\bar{x}(t), h(\bar{x}(t))) \\ \Leftrightarrow f_2(x, h(x)) &= h'(x)f_1(x, h(x)), \quad x \in V_c \end{aligned} \quad (7.2)$$

(7.2) heißt Funktionalgleichung für h . (7.2) ist eine singuläre PDE für h .

ii) Ist 0 asymptotisch stabil bzw. stabil bzw. instabil für das reduzierte System $x' = f_1(x, h(x))$, so gilt das auch für das Ausgangssystem $z' = f(z)$.

Beispiel 7.4 (Anosov). Betrachte das System $x' = x^2$, $y' = -y$. Die Lösung zum Anfangswert (x_0, y_0) lautet

$$(x(t), y(t)) = \left(\frac{x_0}{1-x_0t}, y_0 \exp(-t) \right), \quad -\infty < x_0t < 1.$$

Ist $x_0 \neq 0$, so folgt

$$y_0 \exp\left(-\frac{1}{x_0}\right) \exp\left(\frac{1}{x(t)}\right) = y_0 \exp\left(-\frac{1}{x_0} + \frac{1-x_0t}{x_0}\right) = y_0 \exp(-t) = y(t).$$

Mit $\alpha := y_0 \exp\left(-\frac{1}{x_0}\right)$ finden wir

$$y(t) = \alpha \exp\left(\frac{1}{x(t)}\right) =: h_\alpha(x(t)), \quad x(t) \neq 0.$$

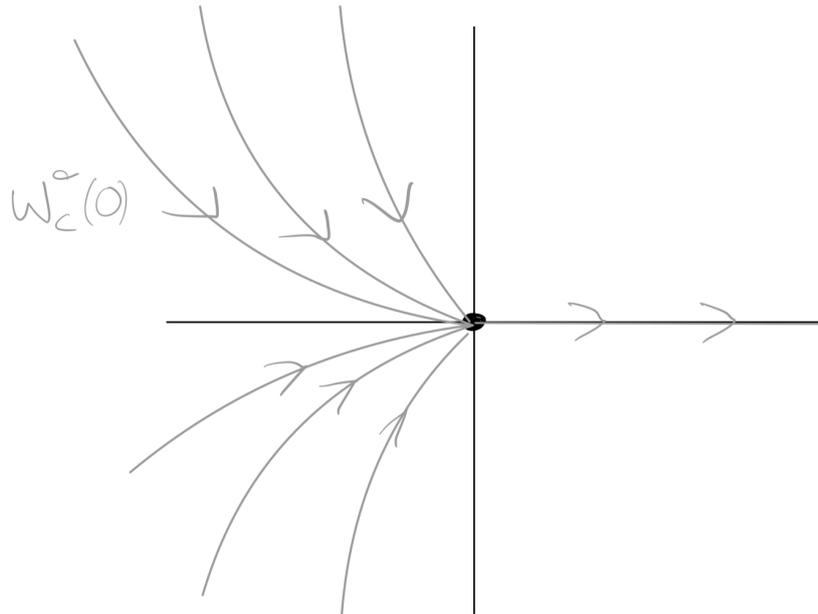
In der Tat definiert jede Funktion (beachte $x_0 < 0 \Rightarrow x(t) < 0$)

$$h_\alpha(x) = \begin{cases} \alpha \exp\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x < 0 \\ 0 & \text{für } x \geq 0, \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$$

eine invariante C^∞ -Mannigfaltigkeit $W_c^\alpha(0) = \{(x, h_\alpha(x)), x \in \mathbb{R}\}$

All diese Zentrumsmannigfaltigkeiten berühren einander in 0 von beliebiger Ordnung und liefern das reduzierte System

$$x' = f_1(x, h_\alpha(x)) = x^2.$$



7.3 Verzweigungen parameterabhängiger Systeme

Die wichtigste Anwendung von Zentrumsmannigfaltigkeiten besteht in der Analyse von Verzweigungen parameterabhängiger dynamischer Systeme.

Betrachte

$$z' = f(\lambda, z), \quad f \in C^{k, \text{Lip}}(\Lambda \times \Omega, \mathbb{R}^N), \quad \Omega \subset \mathbb{R}^N \text{ offen}, \quad \Lambda \subset \mathbb{R}^p \text{ offen}.$$

Sei etwa $0 \in \mathbb{R}^N$ stationär und nicht hyperbolisch bei $\lambda = 0$ in \mathbb{R}^p . Ferner sei

$$\frac{\partial f}{\partial z}(0, 0) = \begin{pmatrix} A_c & 0 \\ 0 & A_s \end{pmatrix}, \quad A_c \in \mathbb{R}^{N_c \times N_c}, \quad A_s \in \mathbb{R}^{N_s \times N_s}$$

mit $N_s + N_c = N$, und $\text{Re}(\lambda) = 0$ für alle $\lambda \in \sigma(A_c)$, $\text{Re}(\lambda) < 0$ für alle $\lambda \in \sigma(A_s)$. Um $z' = f(\lambda, z)$ in der Nähe von $(0, 0) \in \Lambda \times \Omega$ zu studieren, fügen wir formal die Gleichung $\lambda' = 0$ hinzu. Betrachte

$$\lambda' = 0$$

$$z' = f(\lambda, z) = \begin{pmatrix} f_1(\lambda, z) \\ f_2(\lambda, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(\lambda, x, y) \\ f_2(\lambda, x, y) \end{pmatrix}$$

mit $z = (x, y)$, $x \in \mathbb{R}^{N_c}$, $y \in \mathbb{R}^{N_s}$, $(x, y) \in \Omega$ bzw.

$$u' = \hat{f}(u) = \begin{pmatrix} 0 \\ f(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f_1(u) \\ f_2(u) \end{pmatrix}$$

mit $u = (\lambda, z) = (\lambda, x, y)$. Es gilt $\hat{f}(0) = 0$,

$$\hat{f}'(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ B_1 & A_c & 0 \\ B_2 & 0 & A_s \end{pmatrix} \quad \text{mit } B_i := \frac{\partial f_i}{\partial \lambda}(0, 0), \quad i = 1, 2.$$

7.4 Normalformen nichthyperbolischer stationärer Punkte

Betrachte jetzt

$$z' = f(\lambda, z), \quad f \in C^k(\Lambda \times \Omega, \mathbb{R}^N), \quad \Omega \subset \mathbb{R}^N \text{ offen}, \quad \Lambda \subset \mathbb{R} \text{ offen},$$

und es sei (λ_0, z_0) ein nicht hyperbolischer stationärer Punkt. Durch eine Reihe von Reduktionen und Flußäquivalenzen (bzw. Konjugationen) wollen wir das dynamische System in der Nähe von (λ_0, z_0) soweit vereinfachen, dass es sich explizit diskutieren lässt. Diese vereinfachte Form wird Normalform genannt.

Im Folgenden geben wir die einzelnen Schritte an. Dabei erhalten die jeweils neu eingeführten Variablen immer einen um 1 erhöhten Index.

Schritt 1: Translation

$$\mu_1 = \lambda - \lambda_0, \quad \varphi_1 = z - z_0, \quad \mu_1 \in \mathbb{R}, \quad \varphi_1 \in \mathbb{R}^N$$

Man erhält

$$\begin{aligned} \mu_1' &= \lambda' = 0 \\ \varphi_1' &= z' = f(z, \lambda) = f(\lambda_0 + \mu_1, z_0 + \varphi_1) =: \tilde{f}_1(\mu_1, \varphi_1) \end{aligned}$$

mit $\tilde{f}_1(0, 0) = 0$.

Schritt 2: Blockdiagonalisierung der Linearisierung

$$\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \varphi_1 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ d & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_2 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}, \quad d \in \mathbb{R}^N, \quad S \in \mathbb{R}^{N \times N} \text{ inv.}$$

mit

$$S^{-1} \frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial z}(0, 0) S = \begin{pmatrix} A_c & 0 \\ 0 & A_H \end{pmatrix}, \quad d = -A_H^{-1} \frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial \lambda}(0, 0)$$

ergibt

$$\begin{pmatrix} \mu_2 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{f}_2(\mu_2, \varphi_2) \end{pmatrix} = \hat{f}_2(\mu_2, \varphi_2) \in \mathbb{R}^{N+1}, \quad \mu_2 \in \mathbb{R}, \quad \varphi_2 \in \mathbb{R}^N$$

mit

$$\hat{f}_2'(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ B_1 & A_c & 0 \\ 0 & 0 & A_H \end{pmatrix}, \quad B_1 = \frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial \mu_1}(0, 0), \quad A_c \in \mathbb{R}^{N_c \times N_c},$$

$\sigma(A_c)$ = zentrales Spektrum von $\frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial z}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial z}(\lambda_0, z_0)$, $A_H \in \mathbb{R}^{N_H \times N_H}$, $\sigma(A_H)$ instabiles und stabiles Spektrum von $\frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial z}(0, 0)$, $N_c + N_H = N$.

Schritt 3: Reduktion auf die Zentrumsmannigfaltigkeit

Zerlege $\varphi_2 = (\xi_2, \eta_2) \in \mathbb{R}^{N_c} \times \mathbb{R}^{N_H} = \mathbb{R}^N$, $\tilde{f}_2 = (\tilde{f}_{2C}, \tilde{f}_{2H}) \in \mathbb{R}^{N_c} \times \mathbb{R}^{N_H}$.

Die Zentrumsmannigfaltigkeit ist Graph einer Funktion $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{N_c} \rightarrow \mathbb{R}^{N_H}$

$$(\mu_2, \xi_2) \mapsto h(\mu_2, \xi_2) = \eta_2$$

Wir erhalten ein reduziertes dynamisches System der Dimension N_c . Dieses hat die Form

$$\xi_2' = \tilde{f}_{2c}(\underbrace{\mu_2}_{\in \mathbb{R}}, \underbrace{\xi_2, h(\mu_2, \xi_2)}_{=\varphi_2}) = g_2(\mu_2, \xi_2).$$

Es ist zu beachten, dass sich Stabilitätsaussagen für dieses reduzierte System nur dann auf das Originalsystem $z' = f(\lambda, z)$ übertragen, wenn die Matrix A_H in Schritt 2 nur ein stabiles Spektrum besitzt.

Schritt 4: Transformation auf Normalform

Die Transformation

$$\begin{aligned}\mu_2 &= \tau(\mu_3) = \mu_3 + \mathcal{O}(|\mu_3|^2) \\ \xi_2 &= T((\xi_3, \mu_3)) = \xi_3 + \mathcal{O}(\|\xi_3\|^2)\end{aligned}$$

liefert ein System der Form

$$\xi_3' = g_3(\mu_3, \xi_3) \in \mathbb{R}^{N_c}.$$

Typischerweise ist dabei g_3 ein Polynom in (μ_3, ξ_3) mit Monomen möglichst niedriger Ordnung. Ferner sind die Systeme $\xi_2' = g_2(\mu_2, \xi_2)$ und $\xi_3' = g_3(\mu_3, \xi_3)$ jeweils bei 0 topologisch konjugiert (d.h. qualitativ gleiche Phasenbilder) und die Transformation von (μ_2, ξ_2) zu (μ_3, ξ_3) nur eine kleine Störung der Identität. Dieser Schritt dient dazu, die rechte Seite g_2 weiter zu vereinfachen.

Schritt 5: Parameterspiegelung und Zeitumkehr

Wir erlauben noch Transformationen der Form

$$\mu_3 = \varepsilon_1 \mu_4 \xi_4(t) = \xi_3(\varepsilon_2 t) \text{ mit } \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{-1, 1\}.$$

Dies liefert die Gleichung

$$\xi_4' = g_4(\mu_4, \xi_4) = \varepsilon_2 g_3(\varepsilon_1 \mu_4, \xi_4) \in \mathbb{R}^{N_c} \quad (7.3)$$

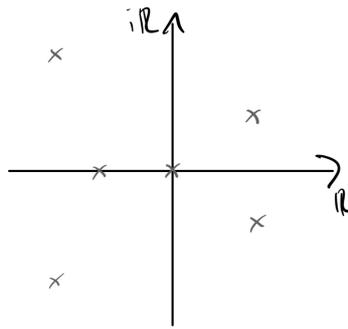
(7.3) heißt die Normalform des dynamischen Systems $z' = f(\lambda, z)$ bei (λ_0, z_0) .

7.5 Normalformen von Umkehr- und Hopfpunkten

Wir führen jetzt ohne Beweis die Normalformen elementarer stationärer Verzweigungen auf.

Der Umkehrpunkt:

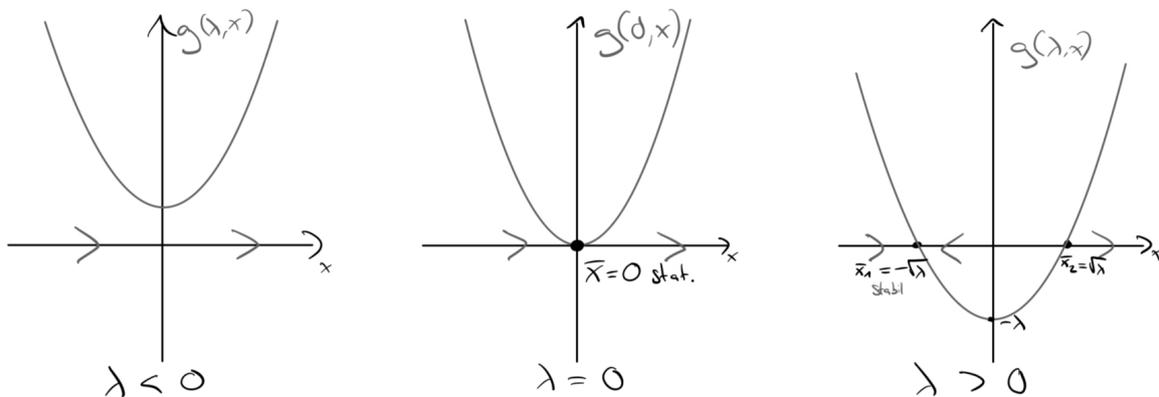
0 ist algebraisch einfacher Eigenwert von $\frac{\partial f}{\partial z}(\lambda_0, z_0)$ und 0 ist der einzige Eigenwert auf der imaginären Achse, d.h. $N_c = 1$.



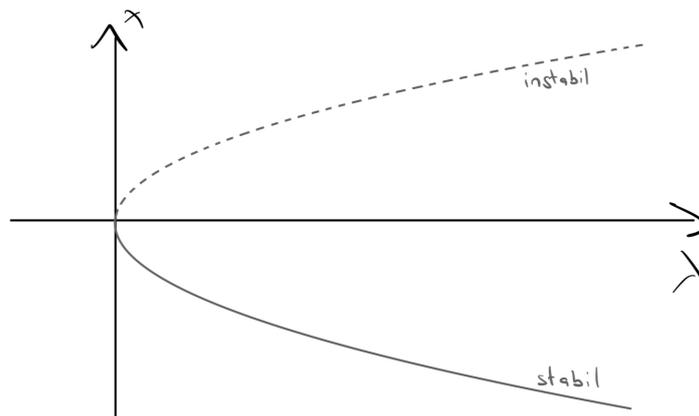
Die Normalform lautet

$$x' = x^2 - \lambda = g(\lambda, x) \quad (7.4)$$

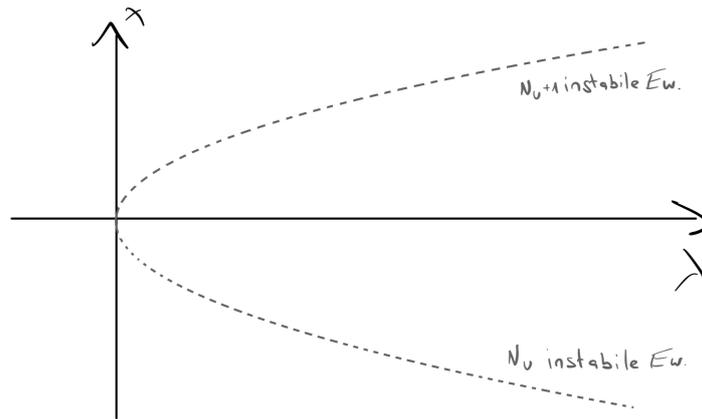
Die Gleichung (7.4) lässt sich sogar explizit lösen. Qualitative Diskussion von (7.4) liefert



Bemerkung 7.5. Die Stabilitätsdiskussion von (7.4) lässt sich nur dann auf das Originalsystem übertragen, falls $\sigma(A_H) = \sigma(A_s)$, d.h. $\dim(A_u) = 0$. Im Verzweigungsdiagramm erhalten wir



Gilt $\dim(A_u) = N_u$, so folgt



Die Bedingungen, welche eine Durchführung der Schritte 1-5 zur Normalform (7.4) erlauben, lauten:

$$\sigma \left(\frac{\partial f}{\partial z}(\lambda_0, z_0) \right) \cap \mathbb{R} = \{0\},$$

0 ist algebraisch einfacher Eigenwert mit (U1)

$$N \left(\frac{\partial f}{\partial z}(\lambda_0, z_0) \right) = \text{span}\{\Phi_0\}, \quad \Phi_0^\top \Phi_0 = 1.$$

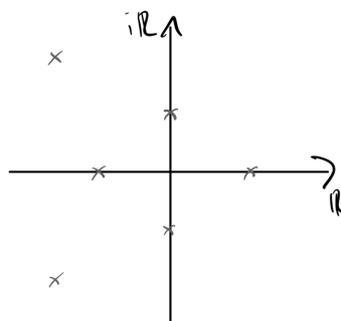
$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(\lambda_0, z_0)(\Phi_0, \Phi_0) \notin R \left(\frac{\partial f}{\partial z}(\lambda_0, z_0) \right) \quad \text{(U2)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda}(\lambda_0, z_0) \notin R \left(\frac{\partial f}{\partial z}(\lambda_0, z_0) \right) \quad \text{(U3)}$$

- (U2) ist eine Nichtenartungsbedingung. (U2) garantiert, dass der Koeffizient vor x^2 im reduzierten System auf der Zentrumsfunktion nicht verschwindet.
- (U3) wird als Transversalitätsbedingung bezeichnet. (U3) garantiert den nicht verschwindenden Koeffizienten vor λ im reduzierten System. Im Verzweigungstechnischen Sinne sichert (U3), dass (λ_0, z_0) eine reguläre Lösung von $f(\lambda, z) = 0$ ist.

Der Hopf-Punkt:

$\frac{\partial f}{\partial z}(\lambda_0, z_0)$ hat die algebraisch einfachen Eigenwerte $\pm i\omega_0$, $\omega_0 \neq 0$ und sonst keine auf der imaginären Achse, d.h. $N_c = 2$.



Bedingungen zur Erlangung der Normalform

$$\sigma \left(\frac{\partial f}{\partial z}(\lambda_0, z_0) \right) \cap i\mathbb{R} = \{\pm i\omega_0\}, \quad \omega_0 \neq 0, \quad (\text{H1})$$

$i\omega_0$ ist ein algebraisch einfacher Eigenwert.

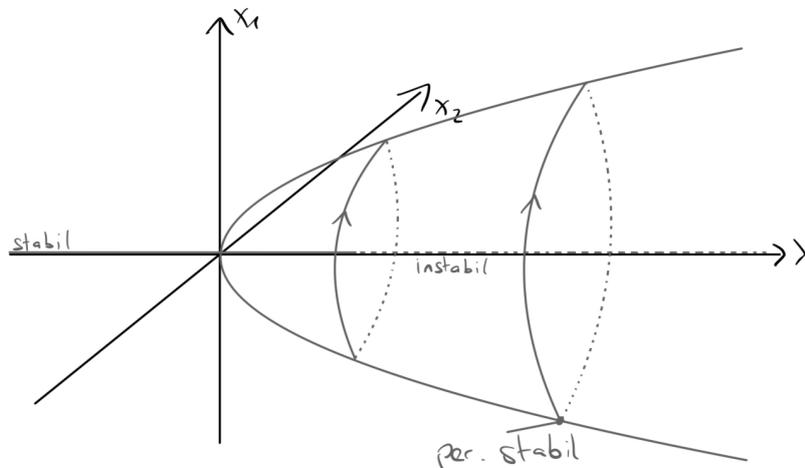
(H1) garantiert die Existenz eines glatten Lösungszweiges $(\lambda, z(\lambda))$ mit $z(\lambda_0) = z_0$, $\lambda \in I$, $I \subset \mathbb{R}$ Intervall. Ferner sind die Eigenwerte $\mu(\lambda), \bar{\mu}(\lambda)$ von $\frac{\partial f}{\partial z}(\lambda, z(\lambda))$ mit $\mu(\lambda_0) = i\omega_0$, $\bar{\mu}(\lambda_0) = -i\omega_0$ glatt in λ .

$$\text{Es gelte } \frac{d}{d\lambda}(\text{Re}(\mu(\lambda))) \Big|_{\lambda=\lambda_0} \neq 0. \quad (\text{H2})$$

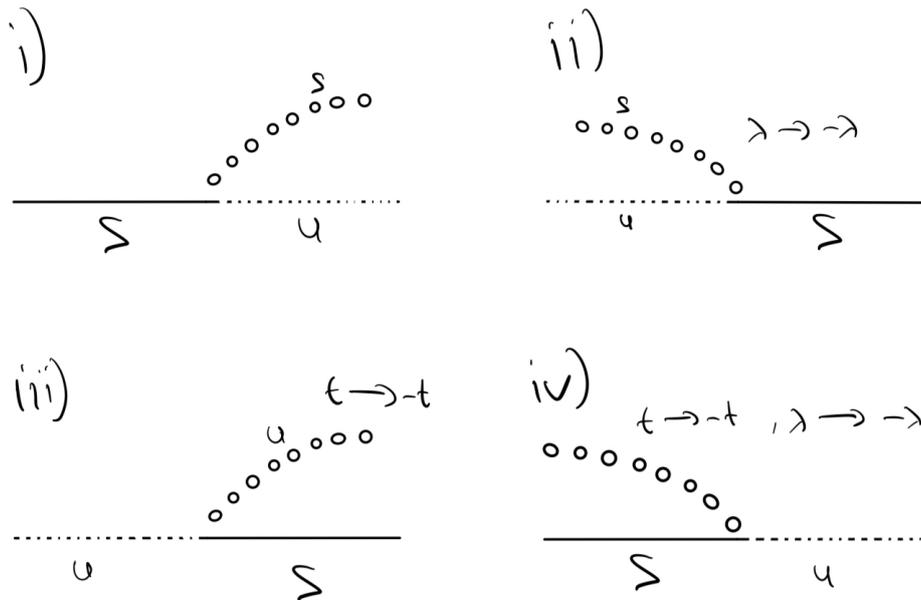
Die Normalform lautet dann

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - (x_1^2 + x_2^2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (7.5)$$

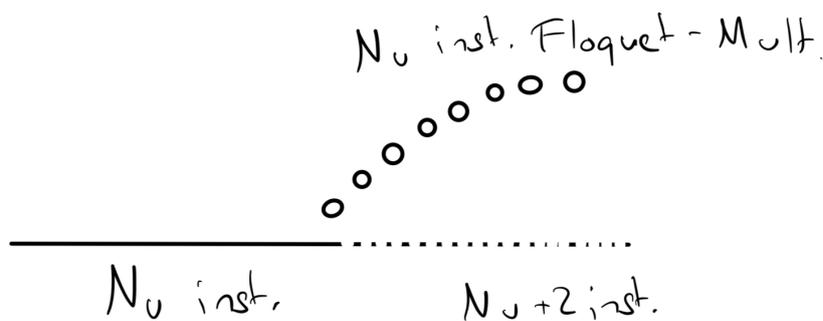
(H2) stellt sicher, dass der Koeffizient vor $(x_1^2 + x_2^2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ im reduzierten System auf der Zentrumsmannigfaltigkeit nicht verschwindet. (7.5) hat den stationären Zweig $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = (0, 0)$ für $\lambda \in \mathbb{R}$. Bei $\lambda = 0$ verliert der Nullpunkt seine Stabilität, und es entstehen stabile, 2π -periodische Orbits $(\sqrt{\lambda} \cos(t), \sqrt{\lambda} \sin(t))$, $\lambda > 0$.



Man beachte, dass diese Stabilitätsaussagen selbst im Fall $\dim(A_u) = 0$ nicht mehr unbedingt gelten müssen, da in Schritt 5 eine Parameterspiegelung sowie Zeitumkehr zugelassen ist. Insgesamt sind die 4 folgenden Verzweigungsbilder im Fall $\dim(A_u) = 0$ möglich.



Im allgemeinen Fall gilt in i)



Bemerkung 7.6. Der lineare Hauptteil der Normalform (7.5) hat die Eigenwerte $\lambda \pm i$ und die entstehende periodische Lösung hat die Periode 2π . Allgemein lässt sich zeigen, dass die entstehende periodische Lösung in etwa die Periode $2\pi\omega_0$ hat.