

## ÜBUNGEN ZU Numerik partieller Differentialgleichungen II

<http://www.math.uni-konstanz.de/~schropp/numpdg.html>

### Blatt 1

Abgabe: Donnerstag, 4.5.2017, in der Vorlesung!

#### Aufgabe 1 (Theorie)

(6 Punkte)

Vorgelegt sei die Neumannsche Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} -\Delta u + \lambda u &= g \text{ in } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= 0 \text{ auf } \partial\Omega \end{aligned} \tag{1}$$

mit  $\lambda \geq 0$ ,  $g \in L^2(\Omega)$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  beschränktes Gebiet mit stückweise glattem Rand  $\partial\Omega$  und strikter Keigeleigenschaft. Dabei ist  $n$  der äußere Normaleneinheitsvektor.

- a) Leiten Sie eine schwache Formulierung für die Aufgabe (1) her.
- b) Zeigen Sie: Ist  $\lambda > 0$ , so existiert genau eine schwache Lösung  $u \in H^1(\Omega)$  von (1).  
Hinweise: Satz von Lax-Milgram.

#### Aufgabe 2 (Theorie)

(6 Punkte)

Gegeben sei erneut das Problem (1), dieses Mal aber mit  $\lambda = 0$ . Zeigen Sie:

- (i) Es existiert genau eine schwache Lösung

$$u \in V := \left\{ u \in H^1(\Omega) : \int_{\Omega} u \, dx = 0 \right\}$$

von (1). Hinweis: Wenden Sie den Satz von Lax-Milgram an auf den Raum  $V$  mit der Norm  $\|u\|_V := \left( \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx \right)^{1/2}$ ; dafür benötigen Sie die zweite Poincarésche Ungleichung: Für  $u \in H^1(\Omega)$  existiert ein  $C_P > 0$  mit

$$\|u\|_{L^2} \leq C_P \left( \left( \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx \right)^{1/2} + \left| \int_{\Omega} u(x) \, dx \right| \right).$$

- (ii) Ist  $u$  eine klassische Lösung von (1), d. h.  $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ , so gilt

$$\int_{\Omega} g \, dx = 0.$$

**Aufgabe 3** (Matlab)

(9 Punkte)

Wir betrachten die inhomogene Helmholtz-Gleichung

$$-\Delta u + \lambda u = g \text{ in } \Omega \quad (2)$$

versehen mit den Dirichletschen Randbedingungen auf  $\partial\Omega$ 

$$u|_{\partial\Omega} = \gamma. \quad (3)$$

Das Gebiet  $\Omega$  sei durch  $\Omega = A \setminus B$  definiert, wobei

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = (r + \sin(6\varphi)) \cos(\varphi), y = (r + \cos(6\varphi)) \sin(\varphi), \varphi \in [0, 2\pi), r \in [0, 5)\},$$

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

Ferner gelte  $\lambda = 1/2$  und

$$g(x, y) = \cos(x/2) \sin(y/2) + 1/80(x^2 + y^2) - 1/10,$$

$$\gamma(x, y) = \cos(x/2) \sin(y/2) + 1/40(x^2 + y^2).$$

Die exakte Lösung zu (2)–(3) lautet

$$\bar{u}(x, y) = \cos(x/2) \sin(y/2) + 1/40(x^2 + y^2).$$

Finden Sie mit Hilfe der Finite-Elemente-Methode aus der PDE-Toolbox von Matlab die numerische Lösung  $u_h$  von (2)–(3).

Visualisieren Sie jeweils in einem 3D-Plot

- die numerische Lösung  $u_h$ ,
- die exakte Lösung  $\bar{u}$ ,
- den Fehler  $|\bar{u} - u_h|$ .

Hinweise zum Vorgehen:

1. Erstellen Sie zunächst mittels der PDE-Toolbox ein vereinfachtes Template, in dem Sie  $A$  als einen Kreis mit Radius  $r_A > r_B$  implementieren, so dass gilt:  $B \subset A$  und  $\Omega = A \setminus B$ .
2. Setzen Sie nacheinander die Randbedingungen und PDE-Spezifikationen und verfeinern Sie das Gitter zwei Mal. Lösen Sie anschließend auf dem Gitter und plotten Sie die Lösung. Speichern Sie das Template als m-File.
3. Modifizieren Sie nun dieses Template in den Abschnitten „Geometry description“ und „Boundary conditions“ entsprechend dem gegebenen  $A$  von oben. Approximieren Sie dazu  $A$  als einen geschlossenen Polygonzug mit 100 Stützstellen.
4. Ergänzen Sie weiterhin das Template nach dem Abschnitt „Solve PDE“ um Visualisierungen der exakten Lösung und des Fehlers mittels `pdeplot`. Für die benötigten Daten verwenden Sie die Funktion

$$[p, e, t, u_h] = \text{getpdetooldata.m},$$

welche auf der Homepage zu finden ist.

5. Speichern Sie alles erneut in einem m-File ab.

**Hinweise zur Abgabe:**

- Die Programmieraufgaben können in 2er-Gruppen bearbeitet werden.
- Kommentieren Sie die implementierten Schritte in Ihrem Quellcode nachvollziehbar.
- Schicken Sie die Matlab-Files per E-Mail an *Markus.Schlupf@uni-konstanz.de*.
- Drucken Sie den Quellcode aus und geben Sie ihn zusammen mit den Theorieaufgaben ab.