Universität Konstanz *SS 2017*
Fachbereich Mathematik und Statistik
J. Schropp, M. Schlipf

ÜBUNGEN ZU **Numerik partieller Differentialgleichungen II**

http://www.math.uni-konstanz.de/~schropp/numpdg.html

Blatt 10

Abgabe: Donnerstag, 06.07.2015, in der Vorlesung!

Aufgabe 1 (Theorie) (6 Punkte)

Gegeben sei die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\dot{x} = \lambda x, \quad \lambda \in \mathbb{C} \text{ mit } \mathrm{Re}(\lambda) < 0. \tag{1}$$

Bestimmen Sie die Stabilitätsfunktion $g = g_\vartheta$ des ϑ-Verfahrens und zeigen Sie die Beziehung

$$\mathbb{C}_- \subset S_\vartheta$$

für $\vartheta \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Dabei sind $\mathbb{C}_- := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) \leq 0\}$ die linke komplexe Halbebene und $S_\vartheta := \{z \in \mathbb{C} : |g_\vartheta(z)| \leq 1\}$ der Stabilitätsbereich des ϑ-Verfahrens.

Aufgabe 2 (Theorie) (6 Punkte)

Gegeben sei die Burgers-Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}u^2\right) = 0, \quad x \in \mathbb{R},\ t \geq 0 \tag{2}$$

mit unstetiger Anfangsbedingung

$$u(x,0) = u_0(x) = \begin{cases} u_l, & x \leq 0, \\ u_r, & x > 0, \end{cases} \tag{3}$$

wobei u_l, $u_r \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie: Die Schockwelle

$$u(x,t) = \begin{cases} u_l, & x \leq st \\ u_r, & x > st \end{cases}$$

mit der Schockgeschwindigkeit $s = \frac{1}{2}(u_l + u_r) > 0$ ist eine schwache Lösung von (2)-(3).

Aufgabe 3 (Matlab) (9 Punkte)

Gegeben sei die nichtlineare Erhaltungsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) \;=\; 0, \quad x \in \mathbb{R},\ t \geq 0. \tag{4}$$

Das Lax-Friedrichs-Verfahren für (4) ist gegeben durch

$$u_i^{j+1} \;=\; \frac{1}{2}\left(u_{i-1}^j + u_{i+1}^j\right) - \frac{\lambda}{2}\left(f(u_{i+1}^j) - f(u_{i-1}^j)\right)$$

mit $\lambda = \Delta t/\Delta x$. Ferner lautet das Lax-Wendroff-Verfahren zu (4)

$$\begin{aligned} u_i^{j+1} \;=\; & u_i^j - \frac{\lambda}{2}\left(f(u_{i+1}^j) - f(u_{i-1}^j)\right) \\ & + \frac{\lambda^2}{2}\Big(A_{i+1/2}(f(u_{i+1}^j) - f(u_i^j)) - A_{i-1/2}(f(u_i^j) - f(u_{i-1}^j)\Big) \end{aligned}$$

mit $A_{i\pm 1/2} := f'\left(\frac{1}{2}(u_i^j + u_{i\pm1}^j)\right)$.

Implementieren Sie das Lax-Friedrichs- und das Lax-Wendroff-Verfahren für die

1. lineare Advektionsgleichung ($f(u) = au$) mit $a = 1$,
2. Burgers-Gleichung ($f(u) = \frac{1}{2}u^2$).

Nehmen Sie als Anfangswert die stückweise konstante Funktion

$$u_0(x) = \begin{cases} u_l, & x \leq 0, \\ u_r, & x > 0 \end{cases}$$

für u_l, $u_r \in \mathbb{R}$ und visualisieren Sie die numerische sowie die exakte Lösung für jeden Zeitpunkt t in einem $(x, u(x,t))$-Schaubild. Welches Verfahren liefert bessere Ergebnisse? Welche Rolle spielt der Wert des Parameters λ?

Hinweis: Numerisch können Sie keine unbeschränkten Gebiete betrachten, daher muss anstatt von $\mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall $[a_x, b_x]$ mit $a_x < b_x$ diskretisiert werden. Oft sind aber keine Randbedingungen für $x = a_x$ und $x = b_x$ bekannt. In diesem Fall produziert im $j+1$-ten Zeitschritt die Approximation

$$u_0^j = u_1^j, \quad u_n^j = u_{n-1}^j$$

ausreichend gute Ergebnisse, wobei $x_0 = a_x$ und $x_n = b_x$.

Nehmen Sie für Ihre Rechnung folgende Werte: $a_x = -10$, $b_x = 10$, $\Delta x = \frac{b_x - a_x}{200}$ und $t \in [0, 10]$. Probieren Sie unterschiedliche Werte für λ sowie für u_l und u_r aus.

Hinweise zur Abgabe:

- Die Programmieraufgaben können in 2er-Gruppen bearbeitet werden.
- Kommentieren Sie die implementierten Schritte in Ihrem Quellcode nachvollziehbar.
- Schicken Sie die Matlab-Files per E-Mail an *markus.schlipf@uni-konstanz.de.*