Universität Konstanz *SS 2017*
Fachbereich Mathematik und Statistik
J. Schropp, M. Schlipf

ÜBUNGEN ZU **Numerik partieller Differentialgleichungen II**

http://www.math.uni-konstanz.de/~schropp/numpdg.html

Blatt 11

Abgabe: Donnerstag, 13.07.2017, in der Vorlesung!

Aufgabe 1 (Theorie) (6 Punkte)

Vorgelegt sei die Aufgabe

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial t} + \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R},\ t \geq 0,\ u \in \mathbb{R}^2,$$
$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Weisen Sie nach, dass das System (1) hyperbolisch ist und berechnen Sie die Lösung.

Hinweis: Um die Lösung von (1) zu berechnen, transformieren Sie das System in je zwei entkoppelte Gleichungen vom Typ der inhomogenen Advektionsgleichung.

Aufgabe 2 (Theorie) (6 Punkte)

Sei durch $u^{j+1} = \vec{H}(u^j)$, $\big(\vec{H}(u^j)\big)_i = H(u^j_{i-1}, u^j_i, u^j_{i+1})$, $i \in \mathbb{Z}$, $j \in \mathbb{N}$ ein konservatives und monotones Verfahren zur Lösung der skalaren Erhaltungsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) \;=\; 0.$$

gegeben.

Zeigen Sie: Das Verfahren ist l^1-kontrahierend, d. h. es gilt

$$\|\vec{H}(u^j) - \vec{H}(v^j)\|_{l^1} \;\leq\; \|u^j - v^j\|_{l^1}, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Hinweis: Das Verfahren heißt monoton, falls gilt:

$$\frac{\partial H}{\partial u_i}(u_{-1}, u_0, u_1) \geq 0,\ i = -1, 0, 1.$$

Aufgabe 3 (Matlab) (9 Punkte)

Der Verkehr auf einer einspurigen Straße ohne Abfahrts- und Überholmöglichkeiten kann durch eine nichtlineare Erhaltungsgleichung

$$\frac{\partial \rho(t,x)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(V(\rho)\rho\right) = 0 \tag{2}$$

modelliert werden. Hierbei ist $\rho(t,x)$ die Dichte der Autos (Anzahl der Autos pro Längeeinheit) und V ist die Geschwindigkeit eines Autos auf einem Bahnstück mit der Dichte ρ. In diesem Modell ist V gegeben durch

$$V(\rho) = 1 - \frac{\rho}{\rho_{max}},$$

wobei ρ_{max} die maximal mögliche Autodichte ist.

1. Implementieren Sie (analog zu Aufgabe 3, Blatt 10) das Lax-Friedrichs- und das nichtlineare Upwind-Verfahren

$$\begin{aligned} u_i^{j+1} &= u_i^j - \frac{\lambda}{2}(f(u_{i+1}^j) - f(u_{i-1}^j)) \\ &\quad + \frac{\lambda}{2}\Big(\,|a(u_i^j, u_{i+1}^j)| \cdot (u_{i+1}^j - u_i^j) - \,|a(u_{i-1}^j, u_i^j)| \cdot (u_i^j - u_{i-1}^j)\Big), \\ &\quad a(u,v) := (f(u) - f(v))/(u-v), \ \ \lambda := \Delta t/\Delta x \end{aligned}$$

   für die Gleichung (2).
   Als Anfangswerte nehmen Sie für $\rho_{max} = 10$

   (a) $\rho(0,x) = \begin{cases} \rho_{max}(x+1), & -1 < x \leq 0 \\ \rho_{max}(1-x), & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

   (b) $\rho(0,x) = \begin{cases} \rho_{max}, & x \leq 0 \\ \frac{\rho_{max}}{2}, & x > 0 \end{cases}$

   (c) $\rho(0,x) = \begin{cases} \frac{\rho_{max}}{2}, & x \leq 0 \\ \rho_{max}, & x > 0 \end{cases}$

2. Visualisieren Sie die Lösung $\rho(t,x)$ und die zugehörige Geschwindigkeit $V(\rho(t,x))$ zu verschiedenen Zeitpunkten. Interpretieren Sie die entsprechenden Verkehrssituationen!

Hinweise zur Abgabe:

- Die Programmieraufgaben können in 2er-Gruppen bearbeitet werden.
- Kommentieren Sie die implementierten Schritte in Ihrem Quellcode nachvollziehbar.
- Schicken Sie die Matlab-Files per E-Mail an *markus.schlipf@uni-konstanz.de*.