Universität Konstanz *SS 2017*
Fachbereich Mathematik und Statistik
J. Schropp, M. Schlipf

ÜBUNGEN ZU **Numerik partieller Differentialgleichungen II**

http://www.math.uni-konstanz.de/~schropp/numpdg.html

Blatt 2

Abgabe: Donnerstag, 11.05.2015, in der Vorlesung!

Aufgabe 1 (Theorie) (6 Punkte)

Es seien V, W zwei Vektorräume und $a : V \times V \to \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform mit $a(u, u) \geq 0$ für alle $u \in V$, und $b : V \times W \to \mathbb{R}$ sei eine bilineare Abbildung. Ferner sei F ein lineares Funktional auf V und G ein solches auf W.
Zeigen Sie: Ein Paar $(v^*, w^*) \in V \times W$ erfüllt

$$\begin{aligned} a(v^*, x) + b(x, w^*) &= F(x) \quad \text{für alle } x \in V, \\ b(v^*, y) &= G(y) \quad \text{für alle } y \in W \end{aligned}$$

genau dann, wenn für das Funktional $J : V \times W \to \mathbb{R}$,

$$J(v, w) = a(v, v) + 2b(v, w) - 2F(v) - 2G(w)$$

die Sattelpunkteigenschaft

$$J(v^*, w) \leq J(v^*, w^*) \leq J(v, w^*) \quad \text{für alle } v \in V,\ w \in W$$

gilt.

Aufgabe 2 (Theorie) (6 Punkte)

(a) Für $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ sei $P_r(\Gamma) := \{u : \Gamma \to \mathbb{R} : u \text{ ist ein Polynom mit } \deg(u) = r\}$ der Raum der Polynome in zwei Variablen von Grad r. Zeigen Sie: Die Menge $\left\{x^k y^l\right\}_{0 \leq k+l \leq r}$ bildet eine Basis von $P_r(\Gamma)$ und es gilt

$$\dim\left(P_r(\Gamma)\right) = \frac{(r+1)(r+2)}{2}.$$

(b) Die Punkte $p^1 = (0,0)$, $p^2 = (1,0)$, $p^3 = (1,1)$, $p^4 = (0,1)$ beschreiben die Ecken eines Referenzquadrats $\mathcal{Q}$. Die Basisfunktionen mit entsprechender Nummerierung lauten

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2) &= (1 - x_1)(1 - x_2) \\ f_2(x_1, x_2) &= x_1(1 - x_2) \\ f_3(x_1, x_2) &= x_1 x_2 \\ f_4(x_1, x_2) &= (1 - x_1)x_2. \end{aligned}$$

Berechnen Sie die affine Transformation R von $\mathcal{Q}$ auf

$$\tilde{\mathcal{Q}} := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \ -1 \leq x_1 + x_2 \leq 1, \ -1 \leq x_2 - x_1 \leq 1\}$$

und geben Sie die Basisfunktionen $\tilde{f}_i := f_i \circ R^{-1}$ auf $\tilde{\mathcal{Q}}$ an.