Universität Konstanz *SS 2017*
Fachbereich Mathematik und Statistik
J. Schropp, M. Schlipf

ÜBUNGEN ZU **Numerik partieller Differentialgleichungen II**

`http://www.math.uni-konstanz.de/~schropp/numpdg.html`

Blatt 3

Abgabe: Donnerstag, 18.05.2015, in der Vorlesung!

Aufgabe 1 (Theorie) (6 Punkte)

Seien V und V_h Unterräume eines Hilbertraumes H mit $V_h \not\subset V$. Es sei $a : H \times H \to \mathbb{R}$ eine stetige Bilinearform mit Konstante C, welche koerziv auf V_h ist mit der Konstanten γ. Ferner löse $u \in V$ das Problem

$$a(u, v) \;=\; F(v) \quad \text{für alle } v \in V,$$

wobei $F \in H'$, und $u_h \in V_h$ löse

$$a(u_h, v) \;=\; F(v) \quad \text{für alle } v \in V_h.$$

Zeigen Sie die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_H \;\leq\; & \left(1 + \frac{C}{\gamma}\right) \inf\{\|u - v\|_H :\ v \in V_h\} \\ & + \frac{1}{\gamma} \sup \left\{ \frac{|a(u - u_h, w)|}{\|w\|_H} :\ w \in V_h \backslash \{0\} \right\}. \end{aligned}$$

Aufgabe 2 (Theorie) (6 Punkte)

Fast inkompressible Flüssigkeiten mit Geschwindigkeitsfeld u werden z. B. modelliert durch die Minimierung des Funktionals $F : V \to \mathbb{R}$, $V := (H_0^1(\Omega))^2$,

$$F(v) \;=\; \frac{1}{2} \int_\Omega \sum_{i=1}^{2} |\nabla v_i|^2 + \alpha^{-2} \operatorname{div}(v)^2 - f \cdot v \, dx$$

mit $f \in \left(L^2(\Omega)\right)^2$ und einem Parameter α, $0 < \alpha \ll 1$.

(i) Stellen Sie die zugehörige Variationsgleichung für das Geschwindigkeitsfeld u auf.

(ii) Setzen Sie $p := \alpha^{-2}\operatorname{div}(u)$ und leiten Sie aus (i) für (u,p) eine weitere Variationsgleichung der Gestalt

$$a(u,v) + b(v,p) = \langle f, v\rangle_{L^2(\Omega)} \quad \text{für alle } v \in V,$$
$$b(u,q) - s(p,q) = 0 \text{ für alle } q \in L^2(\Omega)$$

her, welche bis auf einen „Strafterm" $s(p,q)$ die Sattelpunktform besitzt.

Aufgabe 3 (Matlab) (9 Punkte)

Vorgelegt sei die Poisson-Gleichung

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega = (-1,1)^2, \qquad u(x,y) = x^2 + y^2 \quad \text{auf } \partial\Omega$$

mit der rechten Seite $f(x,y) = 2\pi^2 \sin(\pi x)\sin(\pi y) - 4$ für $(x,y) \in \Omega$.

(i) Lösen Sie dieses Problem mit Matlab und gehen Sie dabei nach folgendem Muster vor:

- Erzeugen Sie ein Geometry- und Boundary-File, indem Sie zunächst mittels der PDE Toolbox das Gebiet zeichnen und die Randbedingungen entsprechend der Angabe setzen. Exportieren Sie nun die Geometry- und Boundary-Daten in den Workspace (siehe Menü „Draw" und „Boundary"). Zum Erstellen der entsprechenden m-Files verwenden Sie nun die Matlab-Funktionen `decsg` und `wgeom` sowie `wbound` auf den exportierten Daten (siehe Matlab-Hilfe).
- Schreiben Sie nun ein m-File, in welchem Sie mittels den Matlab-Funktionen `initmesh` und `assempde` die Poisson-Gleichung für verschiedene Gitterdiskretisierungen $h = 0.3, 0.25, 0.2, 0.15, 0.1$ lösen.

(ii) Führen Sie mit den erhaltenen Daten aus (i) eine Konvergenzanalyse in der L^∞-Norm durch, in dem Sie jeweils den Fehler

$$e_h := \|u_{ex} - u_h\|_{L^\infty}$$

für alle h berechnen. Dabei ist u_h die numerische und u_{ex} die exakte Lösung; letztere ist durch $u_{ex}(x,y) = \sin(\pi x)\sin(\pi y) + x^2 + y^2$ gegeben. Geht man für ein $C > 0$ von der Beziehung

$$e_h = Ch^p$$

aus, so kann mittels der Umformung

$$\ln(e_h) = \ln(C) + p\ln(h)$$

die Steigung p der Ausgleichsgeraden durch die Punkte $(\ln(h), \ln(e_h))$ für $h = 0.3, 0.25, 0.2, 0.15, 0.1$ ermittelt werden. Tragen Sie diese Punkte samt der Ausgleichsgeraden in ein Schaubild ein (verwenden Sie dafür die Befehle `polyfit` und `polyval`). Geben Sie die Konvergenzordnung p auf der Konsole aus.

(iii) Zeichnen Sie zum Schluss noch die Triangulierung und die Lösung u_h für $h = 0.1$ jeweils in ein eigenes Schaubild ein.

Hinweise zur Abgabe:

- Die Programmieraufgaben können in 2er-Gruppen bearbeitet werden.
- Kommentieren Sie die implementierten Schritte in Ihrem Quellcode nachvollziehbar.
- Schicken Sie die Matlab-Files per E-Mail an *markus.schlipf@uni-konstanz.de.*