Universität Konstanz *SS 2017*
Fachbereich Mathematik und Statistik
J. Schropp, M. Schlipf

Übungen zu **Numerik partieller Differentialgleichungen II**

http://www.math.uni-konstanz.de/~schropp/numpdg.html

Blatt 4

Abgabe: bis Freitag 26.05.2015, 12.00 Uhr, in F 419!

Aufgabe 1 (Finite Elemente in 1D – Theorie) (6 Punkte)

Gegeben sei für $\lambda > 0$ das eindimensionale Dirichlet-Problem

$$\begin{aligned} -u''(x) + \lambda u(x) &= f(x), \quad x \in \Omega = (0,1), \\ u(0) = u(1) &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

a) Leiten Sie für (1) die schwache Formulierung

$$a(u,\varphi) = b(\varphi) \quad \text{für alle} \quad \varphi \in H_0^1(\Omega)$$

her. Hinweis: Bis auf den $u(x)$-Term in der ersten Zeile von (1) geht dies analog zum zweidimensionalen Fall aus der Vorlesung.

b) Gegeben sei nun eine beliebige Diskretisierung des Intervalls Ω:

$$\Omega_h = \{x_1, \dots, x_m\}, \quad x_i \in (0,1).$$

Betrachten Sie für das zu (1) gehörige Galerkin-Verfahren *lineare Ansatz-Funktionen* φ_i, $i = 1, \dots, m$ (sogenannte „Hütchen-Funktionen“, siehe Abbildung), welche die Eigenschaften

- $\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}$ $(1 \le i,j \le m)$,
- $\mathrm{supp}(\varphi_i) = [x_{i-1}, x_{i+1}]$ für $i = 1 \dots, m$, wobei $x_0 = 0$ und $x_{m+1} = 1$

erfüllen. Leiten Sie nun analog zum zweidimensionalen Fall für diesen Ansatz ein lineares Gleichungssystem in der Form

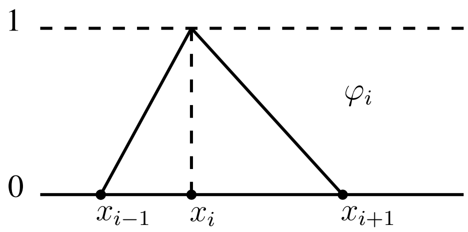
$$Ac = r, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times m}, \quad c, r \in \mathbb{R}^m$$

her, wobei

$$A = D + \lambda P, \quad D_{ij} = \int_\Omega \varphi_i' \varphi_j' \, dx, \quad P_{ij} = \int_\Omega \varphi_i \varphi_j \, dx \qquad (1 \le i,j \le m),$$

$$r_i = \int_\Omega f \varphi_i \, dx \qquad (1 \le i \le m).$$

Gehen Sie hierbei von einer konstanten rechten Seite aus, d. h. $f = k$, $k \in \mathbb{R}$. Konkret bedeutet dies:



(i) Definieren Sie sich die Hütchenfunktionen φ_i auf Ω.

(ii) Berechnen Sie die zugehörigen Ableitungen φ_i' auf Ω.

(iii) Berechnen Sie die Integrale

$$\int_\Omega \varphi_i' \varphi_j' \, dx, \qquad \int_\Omega \varphi_i \varphi_j \, dx, \qquad \int_\Omega f \varphi_i \, dx.$$

Aufgabe 2 (Visualisierung von Strömungen) (9 Punkte)

Für die Geschwindigkeit $\mathbf{u} = (u, v)^T$ und den Druck p betrachten wir in einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ die normierten, stationären Navier-Stokes-Gleichungen

$$-\Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \nabla p = 0, \tag{2}$$
$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \tag{3}$$

Zwei in der Praxis gängige Beispiele zur Visualisierung sind

- die *Poiseuille-Strömung* im Gebiet $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; a_x < x < b_x, \, a_y < y < b_y\}$, $a_x, b_x, a_y, b_y \in \mathbb{R}$ mit
$$\mathbf{u}(x, y) = \begin{pmatrix} -(y - a_y)(y - b_y) \\ 0 \end{pmatrix}.$$
- *Vortex* (Wirbel)
$$\mathbf{u}(x, y) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}.$$
Auch hier nehmen wir als Gebiet $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; a_x < x < b_x, \, a_y < y < b_y\}$, $a_x, b_x, a_y, b_y \in \mathbb{R}$.

Theorie:

1. Überprüfen Sie, ob die beiden Strömungen *inkompressibel* sind, d. h. (3) erfüllen.
2. Bestimmen Sie den Druck p unter Benutzung der Gleichung (2).

Matlab:

1. Erzeugen Sie in einem m-File auf dem Gebiet $\Omega = (-2, 2)^2$ mittels `meshgrid` ein äquidistantes Gitter mit Schrittweite $h = 0.2$.
2. Machen Sie sich mit den Matlab-Funktionen `contourf` und `quiver` zur Visualisierung des Drucks p und der Geschwindigkeit $\mathbf{u}$ vertraut.

3. Visualisieren Sie die Konturlinien zum Druck p und das Vektorfeld zur Geschwindigkeit $\mathbf{u}$ in einem gemeinsamen Plot. Achten Sie dabei auf eine geeignete und aussagekräftige Darstellung (`axis`, `colorbar`, `colormap`, `caxis`, `shading`).

4. Oft werden auch sogenannte *Strömungslinien* zur Visualisierung eingesetzt. Um diese zu berechnen, verwenden Sie die Matlab-Befehle `stream2` und `streamline` und visualisieren Sie mehrere Strömungslinien für beide Strömungen. Welche Einstellungen sind für `stream2` möglich? Was ist der Zusammenhang zwischen Geschwindigkeitsfeld und Strömungslinien?

Hinweise zur Abgabe:

- Die Programmieraufgaben können in 2er-Gruppen bearbeitet werden.
- Kommentieren Sie die implementierten Schritte in Ihrem Quellcode nachvollziehbar.
- Schicken Sie die Matlab-Files per E-Mail an *markus.schlipf@uni-konstanz.de.*