Universität Konstanz *SS 2017*
Fachbereich Mathematik und Statistik
J. Schropp, M. Schlipf

Übungen zu **Numerik partieller Differentialgleichungen II**

http://www.math.uni-konstanz.de/~schropp/numpdg.html

Blatt 5

Abgabe: Donnerstag, 01.06.2015, in der Vorlesung!

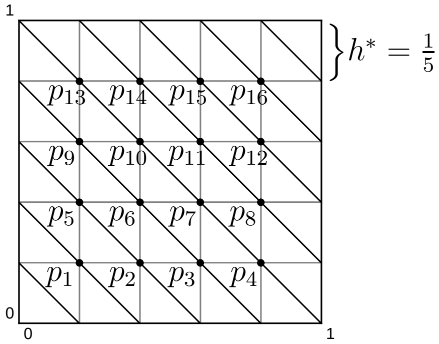
Aufgabe 1 (Finite Elemente in 2D – Theorie) (9 Punkte)

Gegeben sei das zweidimensionale Dirichlet-Problem

$$\begin{aligned} -\Delta u &= g \quad \text{in} \quad \Omega = (0,1)^2, \\ u &= 0 \quad \text{auf} \quad \partial\Omega \end{aligned} \tag{1}$$

mit konstanter rechter Seite $g = k$, $k \in \mathbb{R}$.

Betrachten Sie für Ω die Friedrichs-Keller-Triangulierung (siehe Abbildung für den Fall $N = 16$)



mit der Knotenverteilung $p_1, \ldots, p_N$ (h^* ist hierbei **nicht** die maximale auftretende Kantenlänge aus der Vorlesung).

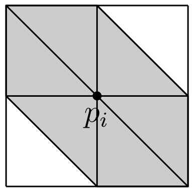
Leiten Sie für lineare Ansatzfunktionen (lineare Finite-Elemente) für die angegebene Triangulierung das Gleichungssystem

$$Ac = r, \quad A \in \mathbb{R}^{N \times N}, \quad c, r \in \mathbb{R}^N$$

aus der Vorlesung für beliebiges quadratisches N her ($N = n^2$ für $n \in \mathbb{N}$).

Beachten Sie zur Aufstellung des Gleichungssystems folgende Punkte:

1. Der Träger einer Basisfunktion u_i ist in folgendem Bild dargestellt (grau hinterlegt):



Dies ist ein Ausschnitt der Triangulierung des Gebietes Ω zur Basisfunktion u_i. Machen Sie sich damit klar, welche Einträge der Matrix A in Bezug auf obige Beispielnummerierung des Gebietes von Null verschieden sind, d. h. für welche Indizes $i, j \in \{1, \ldots, N\}$ sind die Integrale

$$A_{ij} = \int_\Omega \nabla u_j \cdot \nabla u_i \, d(x, y)$$

ungleich Null? Diese sind dann zu berechnen.

2. Da g konstant ist, gilt für den Vektor r

$$r_i = \int_\Omega g u_i \, d(x, y) = k \int_\Omega u_i \, d(x, y)$$

für $i = 1, \ldots, N$.

Hinweise und Bemerkungen:

- Nutzen Sie die Symmetrie der Triangulierung aus.
- Zur Kontrolle sind für gegebenes h^* die Einträge der Matrix A und der rechten Seite r angegeben. Es gilt $A_{ii} = 4$; die restlichen Einträge von A, die nicht Null sind, haben den Wert -1. Für r gilt $r_i = k(h^*)^2$ für alle i.

Aufgabe 2 (Finite Elemente in 1D – Matlab) (9 Punkte)

Lösen Sie in Matlab das Problem (1) (Aufgabe 1, Blatt 4) mittels der Methode der finiten Elemente unter Verwendung von linearen Ansatz-Funktionen. Verwenden Sie dazu die Ergebnisse aus Aufgabe 1 (Blatt 4) und setzen Sie $\lambda = 1$ sowie $f = 2$.

Gehen Sie dazu wie folgt vor:

1. Implementieren Sie in Matlab die Funktionen

$$\texttt{[p,d]} = \texttt{integratephi(xp,i,j)},$$
$$\texttt{[r]} = \texttt{integraterhs(xp,i,k)},$$

die als Rückgabe die folgenden Integrale berechnen: `p` $= P_{ij}$, `d` $= D_{ij}$ und `r` $= r_i$. Als Eingabeargumente akzeptieren die Funktionen eine **beliebige(!)** Diskretisierung des Intervalls Ω in Form des Vektors `xp`, die Indizes `i` und `j` der beiden zur Integralberechnung benötigten Funktionen φ_i und φ_j sowie eine Konstante `k` für konstante rechte Seiten $f(x) = k$.

2. Schreiben Sie ein Matlab-File, in dem Sie diese Funktionen zur Belegung der Verfahrensmatrix A und der rechten Seite r aufrufen und damit die Problemstellung aus Aufgabe 2 für eine **äquidistante** sowie eine **zufällige** Diskretisierung von Ω lösen (Tipp: siehe Matlab-Funktionen `rand` und `sort`). Plotten Sie die Lösungen in geeignete x-$u(x)$-Diagramme.

3. Lösen Sie Gleichung (1) (Aufgabe 1, Blatt 4) ebenfalls mittels dem Verfahren der *zentralen Finite-Differenzen* für eine äquidistante Schrittweite h. Vergleichen Sie die erhaltene FD-Lösung mit der zugehörigen FE-Lösung. Was passiert im Fall $\lambda = 0$? Hinweis: Betrachten Sie die jeweiligen Approximationen für u'', u und f.

Aufgabe 3 (Matlab) (9 Punkte)

Vorgelegt sei die Reaktions-Transport-Gleichung

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} - ku, \quad 0 < x < 1,\ 0 < t < T, \\ u(x,0) &= 1 - x, \quad 0 < x < 1, \\ u(0,t) &= 1,\ u(1,t) = 0, \quad 0 \le t \le T. \end{aligned} \tag{2}$$

Lösen Sie für $k = 10$, $T = 0.1$ das zu (2) gehörige Liniensystem mit dem ϑ-Verfahren für $\vartheta = 0,\ 0.5,\ 1$ zu $\Delta x = 0.05,\ 0.025$ und $\Delta t = 10^{-j},\ j = 1, 2, 3, 4$.

Plotten Sie zu jedem Zeitpunkt t die Lösung in ein x-$u(x,t)$-Diagramm (`drawnow` verwenden!).

Vergleichen Sie die Ergebnisse in Zusammenhang mit der Stabilität des ϑ-Verfahrens (vgl. Kapitel 2a) aus dem aktuellen Skript).

Hinweise zur Abgabe:

- Die Programmieraufgaben können in 2er-Gruppen bearbeitet werden.
- Kommentieren Sie die implementierten Schritte in Ihrem Quellcode nachvollziehbar.
- Schicken Sie die Matlab-Files per E-Mail an *markus.schlipf@uni-konstanz.de*.