Universität Konstanz *SS 2017*
Fachbereich Mathematik und Statistik
J. Schropp, M. Schlipf

Übungen zu Numerik partieller Differentialgleichungen II

http://www.math.uni-konstanz.de/~schropp/numpdg.html

Blatt 7

Abgabe: Donnerstag, 15.06.2015, in der Vorlesung!

Aufgabe 1 (Theorie) (6 Punkte)

Gegeben sei die zweidimensionale homogene Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} u_t = \Delta u, \quad (x,y) \in \Omega = (0,1)^2, \quad 0 < t < T, \\ u(x,y,0) = u_0(x,y),\ (x,y) \in \Omega, \quad u(x,y,t)\restriction_{\partial\Omega} = \gamma(x,y),\ 0 \le t \le T. \end{aligned} \tag{1}$$

a) Leiten Sie das ϑ-Verfahren für (1) her, indem Sie analog zum 1D-Fall den Ausdruck $u_{xx} + u_{yy}$, $u|_{\partial\Omega} = \gamma$ mit dem klassischen Differenzenverfahren (zentrale Differenzen) mit $\Delta x = \Delta y = 1/M$ diskretisieren. Verwenden Sie dabei eine zeilenweise von links unten nach rechts oben laufende Nummerierung für das numerische Ortsgitter.

b) Zeigen Sie: Das ϑ-Verfahren für (1) ist bezüglich der Maximumsnorm stabil, falls

$$\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \le \frac{1}{4(1-\vartheta)}$$

gilt.
Hinweis: Lemma 2.4 aus der Vorlesung und Theorie für M-Matrizen.

Aufgabe 2 (Theorie) (6 Punkte)

Betrachten Sie zu

$$u' = f(t,u), \quad u(t_0) = \alpha$$

mit f p-mal stetig differenzierbar das lineare Mehrschrittverfahren

$$\frac{1}{h}\sum_{i=0}^{k} a_i u_{j+i} = \sum_{i=0}^{k} b_i f(t_{j+i}, u_{j+i}), \quad j = 0, \dots, \sigma(h) - k$$

für eine gegebene Schrittweite $h > 0$. Zeigen Sie: Erfüllen die Koeffizienten des Verfahrens die Bedingungen

$$\sum_{i=0}^{k} a_i = 0 \qquad \text{und}$$

$$\sum_{i=0}^{k}\left(a_i \frac{i^l}{l!} - b_i \frac{i^{l-1}}{(l-1)!}\right) = 0 \quad \text{für} \quad l = 1, \dots, p,$$

so besitzt das Verfahren die Konsistenzordnung p. Dabei sei vorausgesetzt, dass für die ersten $k-1$ Schritte mindestens eine $O(h^p)$-Approximation vorliegt.

Aufgabe 3 (Matlab) (9 Punkte)

(i) Implementieren Sie das ϑ-Verfahren zum Liniensystem

$$w' = \Gamma w, \quad w(0) = w^0 \tag{2}$$

aus Aufgabe 1 mit $\gamma \equiv 0$. Setzen Sie $M = 40$ und testen Sie die drei Anfangswerte

$$u_0(x,y) = \begin{cases} 5, & \text{falls } |x-0.5| + |y-0.5| \leq 0.3, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$u_0(x,y) = \begin{cases} 5, & \text{falls } (x-0.5)^2 + (y-0.5)^2 \leq 0.2, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$u_0(x,y) = 5\sin(2\pi x)\sin(2\pi y).$$

Lösen Sie damit die Aufgabe auf dem Zeitintervall $[0,T] = [0, 0.1]$ für $\vartheta = \frac{1}{2}$ und die Schrittweite $\Delta t = \frac{T}{400} = \frac{1}{4000}$, und plotten Sie die Lösung für jeden Zeitpunkt in ein geeignetes Schaubild (`drawnow` verwenden).

(ii) Lösen Sie mit den gleichen Daten aus (i) erneut das System (2), dieses Mal aber mit dem BDF-Verfahren

$$\frac{1}{2}\left(3u_{j+2} - 4u_{j+1} + u_j\right) = \Delta t f(t_{j+2}, u_{j+2})$$

der Stufe $k = 2$. Verwenden Sie dabei für den ersten Schritt u_1 den aus (i) errechneten Wert mit dem ϑ-Verfahren für $\vartheta = \frac{1}{2}$.

Hinweise zur Abgabe:

- Die Programmieraufgaben können in 2er-Gruppen bearbeitet werden.
- Kommentieren Sie die implementierten Schritte in Ihrem Quellcode nachvollziehbar.
- Schicken Sie die Matlab-Files per E-Mail an *markus.schlipf@uni-konstanz.de*.