Universität Konstanz *SS 2017*
Fachbereich Mathematik und Statistik
J. Schropp, M. Schlipf

ÜBUNGEN ZU **Numerik partieller Differentialgleichungen II**

http://www.math.uni-konstanz.de/~schropp/numpdg.html

Blatt 8

Abgabe: Donnerstag, 22.06.2015, in der Vorlesung!

Aufgabe 1 (Theorie) (6 Punkte)

Gegeben sei das Problem

$$-\Delta u = f \quad \text{in} \quad \Omega, \qquad u = \gamma \quad \text{auf} \quad \partial\Omega \tag{1}$$

mit

$$\begin{aligned}\Omega &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \, 0 < R_a < \sqrt{x^2+y^2} < R_b\right\} \\ &= \{(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) : \, R_a < r < R_b, \; \varphi \in [0, 2\pi)\}\end{aligned}$$

und den Daten

$$\begin{aligned}f(r,\varphi) &= -\frac{1}{r^3}\left(r^3\exp(r)\cos(\varphi) + 1 + r^2\exp(r)\cos(\varphi) - r\exp(r)\cos(\varphi)\right), \\ \gamma(r,\varphi) &= \exp(r)\cos(\varphi) + \frac{1}{r} \quad \text{für} \quad r \in \{R_a, R_b\}.\end{aligned}$$

a) Zeigen Sie: Der Laplace-Operator ist in Polarkoordinaten durch

$$\Delta = \partial_{rr} + \frac{1}{r}\partial_r + \frac{1}{r^2}\partial_{\varphi\varphi}$$

dargestellt.

b) Verifizieren Sie, dass mit $\bar{u}(r,\varphi) := \gamma(r,\varphi)$ eine Lösung von (1) gegeben ist, wenn man die Funktion für die Randdaten einfach auf das Innere von Ω fortsetzt.

Aufgabe 2 (Theorie) (6 Punkte)

a) Leiten Sie für die Aufgabe (1) das klassische Differenzenverfahren her, indem Sie den Laplace-Operator in Polarkoordinaten mittels zentraler Finiter Differenzen diskretisieren. Gehen Sie dabei folgendermaßen vor:

   1. Schreiben Sie für die diskreten Werte $r_i = R_a + i\Delta r$, $\Delta r = \frac{R_b - R_a}{M}$ ($i = 1, \ldots, M-1$) und $\varphi_j = j\Delta\varphi$, $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{N}$ ($j = 0, \ldots, N-1$) die zentralen Differenzen für $\partial_{rr}u$, $\partial_r u$ und $\partial_{\varphi\varphi}u$ auf.

2. Definieren Sie für $u_i^j = u(r_i, \varphi_j)$ den Vektor

$$U := \left(u^0, \ldots, u^{N-1}\right)^T \in \mathbb{R}^{N\cdot(M-1)} \quad \text{mit} \quad u^j := \left(u_1^j, \ldots, u_{M-1}^j\right) \in \mathbb{R}^{M-1},$$

$j = 0, \ldots, N-1$ und stellen Sie damit ein Gleichungssystem der Form

$$HU = G$$

auf, wobei $H \in \mathbb{R}^{N\cdot(M-1)\times N\cdot(M-1)}$ und $G \in \mathbb{R}^{N\cdot(M-1)}$, mit den Randwerten $u_0^j = \gamma(R_a, \varphi_j),\ u_M^j = \gamma(R_b, \varphi_j),\ j = 0, \ldots, N-1$.

Beachten Sie hierbei die für die FD-Approximation zusätzlich benötigten „Randwerte“ $u_i^N = u_i^0,\ u_i^{-1} = u_i^{N-1},\ i = 1, \ldots, M-1$. Diese Identitäten gelten, da in der kartesischen Koordinatendarstellung die u_i^0 und u_i^{N-1} für $i = 1, \ldots, M-1$ den Werten an Nachbarpunkten entsprechen.

b) Formulieren Sie auf Basis der Diskretisierung aus Teil a) mit dem gleichen Gebiet Ω das ϑ-Verfahren für die Gleichung

$$\partial_t u = \partial_{rr} u + \frac{1}{r}\partial_r u + \frac{1}{r^2}\partial_{\varphi\varphi} u + f(r, \varphi, t), \quad u = u(r, \varphi, t) \tag{2}$$

mit Dirichletrandbedingungen auf $\partial\Omega$ und der Anfangsbedingung $u(r, \varphi, 0) = u_0(r, \varphi)$.

Ermitteln Sie für die exakte Lösung

$$u_{ex}(r, \varphi, t) = \frac{1}{r}\sin(\varphi)\cos\left(\frac{1}{t+1}\right)$$

von (2) die Rand- und Anfangsbedingungen von (2) sowie die Funktion f.

Aufgabe 3 (Matlab) (9 Punkte)

a) Lösen Sie in Matlab das Problem (1) mit den dort angegeben Größen Ω, f und γ, indem Sie Ihre Rechnungen aus Aufgabe 2a) verwenden. Setzen Sie dabei folgende Werte: $R_a = 1$, $R_b = 3$, $M = N = 50$.

Plotten Sie anschließend die Lösung in einem dreidimensionalen kartesischen Koordinatensystem (hier ist der Matlab-Befehl `pol2cart` hilfreich).

Schätzen Sie zum Schluss die Konvergenzordnung p des Verfahrens mittels der Größe

$$p \approx \operatorname{ord}(h) := \frac{\log(\varepsilon(h)) - \log(\varepsilon(h/2))}{\log(2)}$$

für den Fehler $\varepsilon(h) := \max\left\{\left|\bar{u}(r_i, \varphi_j) - u_i^j\right| : i = 1, \ldots, M-1,\ j = 0, \ldots, N-1\right\}$, wobei $h := \frac{1}{M} = \frac{1}{N} = \frac{1}{50}$.

b) Lösen Sie in Matlab das Problem (2) mit dem ϑ-Verfahren aus Aufgabe 2b) für ein $\vartheta \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ auf dem Zeitintervall $[0, 1]$. Wählen Sie dabei erneut die Werte $R_a = 1$, $R_b = 3$, $M = N = 50$ und nehmen Sie 100 Zeitschritte. Geben Sie zu jedem Zeitpunkt $t \in [0, 1]$ die Lösung in einem dreidimensionalen kartesischen Koordinatensystem aus.

Hinweise zur Abgabe:

- Die Programmieraufgaben können in 2er-Gruppen bearbeitet werden.
- Kommentieren Sie die implementierten Schritte in Ihrem Quellcode nachvollziehbar.
- Schicken Sie die Matlab-Files per E-Mail an *markus.schlipf@uni-konstanz.de.*