Universität Konstanz *SS 2017*
Fachbereich Mathematik und Statistik
J. Schropp, M. Schlipf

Übungen zu **Numerik partieller Differentialgleichungen II**

http://www.math.uni-konstanz.de/~schropp/numpdg.html

Blatt 9

Abgabe: Donnerstag, 29.06.2015, in der Vorlesung!

Aufgabe 1 (Theorie) (6 Punkte)

Vorgelegt sei die nichtautonome Differentialgleichung

$$w'(t) \quad = \quad \lambda(t)w(t), \quad \lambda(t) \in \mathbb{C}, \ \mathrm{Re}(\lambda(t)) \le 0 \text{ für } t \ge 0. \tag{1}$$

Ein s-stufiges Runge-Kutta-Verfahren mit Tableau $\begin{array}{c|c} c & A \\ \hline & b^T \end{array}$ heißt *nichtautonom-stabil*, falls für dessen Stabilitätsfunktion

$$R(\Gamma) \quad := \quad 1 + b^T\Gamma(I - A\Gamma)^{-1}\mathbb{I}$$

die Beziehung $|R(\Gamma)| \le 1$ gilt für alle Matrizen $\Gamma = \mathrm{diag}(\gamma_1, \ldots, \gamma_s)$ mit $\mathrm{Re}(\gamma_i) \le 0$, $i = 1, \ldots, s$.

Zeigen Sie: Je zwei Lösungen $(y^m)_{m\in\mathbb{N}}$ und $(z^m)_{m\in\mathbb{N}}$ von nichtautonom-stabilen Runge-Kutta-Verfahren mit Schrittweite $\Delta t > 0$ angewandt auf die nichtautonome Testgleichung (1) erfüllen

$$|y^{m+1} - z^{m+1}| \quad \le \quad |y^m - z^m|, \quad m \in \mathbb{N},$$

d. h. das Verfahren ist kontraktiv. Gilt überdies $|R(\Gamma)| < 1$, so folgt $\lim_{m\to\infty} y^m = 0$.

Aufgabe 2 (Theorie) (6 Punkte)

Für die Funktion f gelte $|f(x)| \le K,\ 0 \le x \le 1$ für eine Konstante $K > 0$. Geben Sie eine nur von K und ϑ abhängige Schrittweitenbedingung bezüglich Δt und Δx an, unter der das ϑ-Verfahren für die Anfangsrandwertaufgabe

$$\begin{aligned} u_t = u_{xx} + f(x)u, &\quad 0 < x < 1,\ 0 < t < T, \\ u(x,0) = u_0(x), &\quad 0 < x < 1, \\ u(0,t) = \gamma_0,\ u(1,t) = \gamma_1, &\quad 0 \le t \le T. \end{aligned}$$

bezüglich der Maximumsnorm auf $\mathbb{R}^{\Omega_h}$ stabil ist.

Aufgabe 3 (Matlab) (9 Punkte)

Lösen Sie die Aufgabe

$$
\begin{aligned}
u_t &= u_{xx} - \lambda \frac{u}{1+u}, \quad 0 < x < 1,\ 0 < t < T, \\
u(x,0) &= u_0(x) \ = \ 1, \quad 0 < x < 1, \\
u(0,t) &= u(1,t) \ = \ \exp\left(\frac{t}{1+t^2}\right), \quad 0 \le t \le T
\end{aligned}
\tag{2}
$$

in Matlab für $\lambda = 50$ und $T = 5$ mittels des Liniensystems mit dem impliziten Euler-Cauchy-, dem Crank-Nicholson- sowie einem steifen BDF-Verfahren für $\Delta x = 0.01$.

(i) Implementieren Sie die ersten beiden Verfahren in MATLAB für $\Delta t = 0.01$. Verwenden Sie dabei zum Lösen der nichtlinearen Gleichungen das Newton-Verfahren, indem Sie dieses an der Lösung des vorigen Zeitlevels starten.

(ii) Benutzen Sie für das BDF-Verfahren die MATLAB-Routine `ode15s`.

(iii) Lösen Sie zum Schluss die Gleichung (2) mit dem BDF-Verfahren aus (ii) für $T = 1000$. Beobachten Sie die Konvergenz der Lösung gegen einen stationären Zustand für $t \to \infty$? Welche Gleichung erfüllt die Grenzfunktion?

Hinweise zur Abgabe:

- Die Programmieraufgaben können in 2er-Gruppen bearbeitet werden.
- Kommentieren Sie die implementierten Schritte in Ihrem Quellcode nachvollziehbar.
- Schicken Sie die Matlab-Files per E-Mail an *markus.schlipf@uni-konstanz.de*.