Definitionen der stochastischen Grundbegriffe

2. November 2006

Sei Ω eine Menge und $\mathcal{P}(\Omega)$ die Potenzmenge von Ω. Eine Menge $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ heißt σ–Algebra genau dann, wenn

(i) $\Omega \in \mathcal{F}$

(ii) für alle $A \in \mathcal{F}$ folgt $\Omega \setminus A \in \mathcal{F}$

(iii) für alle $A_n \in \mathcal{F},\ n \in \mathbb{N}$, folgt $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$

Sei $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ eine σ–Algebra. Eine Funktion $P : \mathcal{F} \to [0,1]$ heißt Wahrscheinlichkeitsmaß genau dann, wenn

(i) $P(\Omega) = 1$

(ii) für alle paarweise disjunkten Mengen $A_n \in \mathcal{F},\ n \in \mathbb{N}$, gilt:

$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

Wir nennen $P(A)$ die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis A eintritt. Ein Wahrscheinlichkeitsraum ist ein Tripel $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, bestehend aus einer Menge Ω, einer σ–Algebra $\mathcal{F}$ und einem Wahrscheinlichkeitsmaß P.
Eine Funktion $X : \Omega \to \mathbb{R}$ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ heißt Zufallsvariable genau dann, wenn für alle Borelmenge $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ gilt: $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$.

Die Menge aller Borelmengen ist dabei die kleinste σ–Algebra, die alle offenen Mengen von $\mathbb{R}$ enthält.

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Die Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ heißen stochastisch unabhängig, wenn für alle $A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $i = 1, \ldots, N$ gilt:

$$P(\{\omega \in \Omega;\ X_i(\omega) \in A_i\}) = \prod_{i=1}^{N} P(\{\omega \in \Omega;\ X_i(\omega) \in A_i\}).$$

Wir definieren nun das Integral bezüglich eines Wahrscheinlichkeitsmaßes. Für Treppenfunktionen $f(x)=\sum_{i=1}^N c_i 1_{A_i}(x)$ ist das

$$\int_\Omega f\ dP=\sum_{i=1}^N c_i P(A_i).$$

Ist $X:\Omega\to\mathbb{R}$ eine Zufallsvariable, so definieren wir

$$\int_\Omega X dP=\int_\Omega X(\omega)dP(\omega)=\sup_{f\leq X, f \text{ Treppenfunktion}}\int_\Omega f dP$$

Der Erwartungwert $E(X)$ und die Varianz $V(X)$ sind dann definiert durch

$$E(X)=\int_\Omega X dP,\ V(X):=E(X^2)-(E(X))^2$$

falls die entsprechenden Integrale existieren.

Die Standardabweichung σ ist gegeben durch $\sigma=\sqrt{V(X)}$.

Die Kovarianz zweier Zufallsvariablen X und Y ist definiert durch

$$\text{cov }(X,Y)=E(XY)-E(X)\cdot E(Y),$$

falls $E(X)$, $E(XY)$ und $E(Y)$ exisitieren. Für unabhängige Zufallsvariablen X und Y gilt

$$E(XY)=E(X)\cdot E(Y),$$

d.h. cov $(X,Y)=0$. Eine weitere Konsequenz der Unabhängigkeit ist

$$V(X+Y)=V(X)+V(Y)$$

Unter bestimmten Voraussetzungen können der Erwartungswert und die Varianz mittels eines Riemann–Integrals berechnet werden.

Sei $X:\Omega\to\mathbb{R}$ eine Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega,\mathcal{F},P)$. Die Verteilungsfunktion F von X ist definiert durch

$$F(z)=P(X\leq z)=P(\{\omega\in\Omega;\ X(\omega)\leq z\}).$$

Falls eine Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ exisitert mit

$$F(z)=\int_{-\infty}^z f(s)ds,$$

so heißt f Dichtefunktion von X, ist f stetig, so folgt $F'=f$.

Der Erwartungswert und die Varianz einer Zufallsvariablen $X:\Omega\to\mathbb{R}$, die eine Dichtefunktion f besitzt, sind gegeben durch

$$E(X)=\int_{\mathbb{R}} xf(x)dx$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \int_{\mathbb{R}} (x - E(x))^2 f(x) dx$$

falls die Integrale existieren.

Seien $\Omega = \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma > 0$. Eine Zufallsvariable X mit der Dichtefunktion

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), \ x \in \mathbb{R}$$

heißt normalverteilt, bzw. $N(\mu, \sigma^2)$–verteilt. Der Erwartungswert und die Varianz lauten $E(X) = \mu$ und $V(X) = \sigma^2$. Eine $N(0,1)$–verteilte Zufallsvariable nennen wir standardnormalverteilt.

Eine Funktion $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$ heißt vektorwertige Zufallsvariable genau dann, wenn für alle Borelmengen $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ gilt: $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$.

Sei $X = (X_1, \ldots, X_d)$ eine d–dimensionale Zufallsvariable, $\mu \in \mathbb{R}^d$ und $\Sigma \in \mathbb{R}^{d,d}$ symmetrisch und positiv definit. Dann heißt X $N(\mu, \Sigma)$ verteilt, wenn X die Dichtefunktion

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d \det(\Sigma)}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^T \Sigma^{-1} (x-\mu)\right), \ x \in \mathbb{R}^d$$

besitzt.