Universität Konstanz *SS 2010*
Fachbereich Mathematik und Statistik
J. Schropp, G. Koch

ÜBUNGEN ZU **Optimierung**

http://www.math.uni-konstanz.de/~schropp/optimierung.html

Blatt 1 **Abgabe: 29.4.2010**

Aufgabe 1 (6 Punkte)

a) Berechnen Sie $\nabla f(x)$ und $\nabla^2 f(x)$ für die Rosenbrock-Funktion

$$f(x) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2 \quad \text{für } x = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2 .$$

Zeigen Sie, dass $x^* = (1,1)^T$ die einzige lokale Minimalstelle von f und dass $\nabla^2 f(x^*)$ positiv definit ist.

b) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$g(x) = 8x_1 + 12x_2 + x_1^2 - 2x_2^2 \quad \text{für } x = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$$

nur einen stationären Punkt besitzt, der weder eine Minimal- noch eine Maximalstelle, sondern ein Sattelpunkt ist. Skizzieren Sie die Niveaulinien von g.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Sei $f \in C^2(D, \mathbb{R})$ und $D \subset \mathbb{R}^n$ offen. Zeigen Sie: Ist $x^* \in D$ eine lokale Minimalstelle von f, so sind $\nabla f(x^*) = 0$ und $\nabla^2 f(x^*)$ positiv semidefinit.
(*Tipp: Arbeiten Sie mit einem Widerspruchsbeweis!*)

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Vorgelegt sei das Problem

$$f(x) = x_1 + x_2 \overset{!}{\to} \min$$

unter der Nebenbedingung $g(x) = x_1^2 + x_2^2 - 2 = 0$. Zeigen Sie durch direktes Verifizieren der Definition, dass die Vektoren $d = (0, \alpha)^T, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ zum Tangentenkegel $T_Z(x^*)$ für $x^* = (-\sqrt{2}, 0)^T$ gehören.