Universität Konstanz *SS 2010*
Fachbereich Mathematik und Statistik
J. Schropp, G. Koch

Übungen zu **Optimierung**

http://www.math.uni-konstanz.de/∼schropp/optimierung.html

Blatt 2 **Abgabe: 14.5.2010, 12Uhr im Briefkasten, Fach 13**

Aufgabe 1 (6 Punkte)

a) Vorgelegt sei das parameterabhängige Optimierungsproblem

$$f(x) = \frac{1}{2}\ln(1+x_1) + \frac{1}{4}\ln(1+x_2) \stackrel{!}{=} min$$

unter der Nebenbedingung

$$g(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2 = \beta\,, \quad \beta \geq 4\,.$$

Berechnen Sie in Abhängigkeit von β die stationären Punkte $(x_1^*(\beta), x_2^*(\beta))$ der Lagrange-Funktion und den zugehörigen Multiplikator $\lambda^*(\beta)$.

b) Es sei ein Problem der Form

$$f(x) \stackrel{!}{=} min$$

unter der Nebenbedingung $g(x) = \beta$, $\beta \in \mathbb{R}^l$ gegeben. Dieses besitze die glatte Lösungskurve $(x^*(\beta), \lambda^*(\beta))$ für $\beta \in B \subset \mathbb{R}^l$ offen. Dann heißt

$$O(\beta) = L(x^*(\beta), \lambda^*(\beta), \beta)$$

die zugehörige Optimalwertfunktion. Zeigen Sie:

$$\frac{d}{d\beta} O(\beta) = \lambda^*(\beta)\,.$$

Aufgabe 2 (6 Punkte)

$$(*) = \begin{cases} \text{Vorgelegt sei das quadratische Problem} \\ \qquad f(x) = \tfrac{1}{2}x^T G x + x^T c \stackrel{!}{=} min \\ \text{unter den Nebenbedingungen} \\ \qquad g(x) = Ax - b = 0 \\ \text{mit } G \in \mathbb{R}^{N,N} \text{ symmetrisch }, c \in \mathbb{R}^N, A \in \mathbb{R}^{l,N}, rg(A) = l \text{ und } b \in \mathbb{R}^l\,. \end{cases}$$

a) Leiten Sie die notwendigen Bedingungen 1-ter Ordnung für eine Lösung ab. Zeigen Sie, dass das abgeleitete Gleichungssystem eindeutig lösbar ist, falls G symmetrisch und positiv definit ist.

b) Zeigen Sie, dass der in a) gefundene stationäre Punkt der Lagrange-Funktion einzige und globale Lösung von $(*)$ ist.

c) Lösen Sie $(*)$ explizit für

$$G = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} -8 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3

(6 Punkte)

Vorgelegt sei ein allgemeines C^2-Optimierungsproblem mit Gleichheits- und Ungleichheitsnebenbedingungen.

a) Sei $x^* \in Z$ lokale Lösung des Optimierungsproblems. Beweisen Sie:

$$\nabla f(x^*)^T d \geq 0 \qquad \forall d \in T_Z(x^*)$$

(vgl. Lemma 9 aus Vorlesung).

b) Sei $N_Z(x) = \{v \in \mathbb{R}^N \mid v^T d \leq 0 \ \forall d \in T_Z(x)\}$. $N_Z(x)$ heißt Normalenkegel und jedes $v \in N_Z(x)$ Normalenvektor. Zeigen Sie: Ist x^* eine reguläre Lösung des Optimierungsproblems, so gilt

$$N_Z(x^*) = \left\{ -\sum_{i \in \mathcal{A}_{x^*}} \mu_i \nabla k_i(x^*) - \sum_{i=1}^{l} \lambda_i \nabla g_i(x^*) \,, \ \mu \geq 0 \right\}.$$