Universität Konstanz *SS 2010*
Fachbereich Mathematik und Statistik
J. Schropp, G. Koch

ÜBUNGEN ZU **Optimierung**

http://www.math.uni-konstanz.de/~schropp/optimierung.html

Blatt 3 **Abgabe: 27.5.2010**

Aufgabe 1

(6 Punkte)

a) Sei $D \subset \mathbb{R}^N$ eine nichtleere, konvexe Menge. Eine Funktion $h : D \to \mathbb{R}$ heißt konvex auf D, falls

$$h(\lambda x + (1-\lambda)y) \;\; \leq \;\; \lambda h(x) + (1-\lambda)h(y) \quad \forall x, y \in D,\ 0 \leq \lambda \leq 1.$$

$h : D \to \mathbb{R}$ heißt konkav auf D, falls $-h$ konvex auf D ist.
Sei nun $D \subset \mathbb{R}^N$ offen und konvex, und sei $h \in C^1(D, \mathbb{R})$. Weisen Sie nach, dass h genau dann konvex auf D ist falls

$$h(x) - h(y) \;\; \geq \;\; \nabla h(y)^T(x-y) \quad \forall x, y \in D.$$

b) Ein Optimierungsproblem

$$f(x) \;\; \stackrel{!}{=} \;\; \min. \tag{1}$$

unter den Nebenbedingungen

$$g(x) \;\; = \;\; Bx - \beta \; = \; 0, \quad B \in \mathbb{R}^{l,N},\ \beta \in \mathbb{R}^l, \tag{2}$$

$$k(x) \;\; \geq \;\; 0 \tag{3}$$

mit $f \in C^2(D, \mathbb{R})$ konvex, $k_i \in C^2(D, \mathbb{R})$ konkav, $i = 1, \ldots, q$, $D \subset \mathbb{R}^N$ offen und konvex heißt konvexes Optimierungsproblem.

Zeigen Sie: Ist (x^*, λ^*, μ^*) Karush-Kuhn-Tucker Punkt eines konvexen Optimierungsproblems (1)-(3), so ist x^* globales Minimum von (1)-(3).

Aufgabe 2

(6 Punkte)

Vorgelegt sei ein konvexes Optimierungsproblem wie in 1b) mit Lagrange-Funktion

$$L(x, \lambda, \mu) \;\; = \;\; f(x) - \sum_{i=1}^{l} \lambda_i g_i(x) - \sum_{i=1}^{q} \mu_i k_i(x).$$

(x^*, λ^*, μ^*), $\mu^* \geq 0$ heißt Sattelpunkt, falls gilt

$$L(x^*, \lambda, \mu) \;\; \leq \;\; L(x^*, \lambda^*, \mu^*) \; \leq \; L(x, \lambda^*, \mu^*) \quad \text{für } (x, \lambda, \mu) \in D \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^q,\ \mu \geq 0.$$

Zeigen Sie: Ist (x^*, λ^*, μ^*) ein Sattelpunkt, so erfüllt (x^*, λ^*, μ^*) die Karush-Kuhn-Tucker Bedingungen.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Lösen Sie das Optimierungsproblem

$$f(x) \; = \; \exp(-x_1) - x_2 \; \stackrel{!}{=} \; \min.$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} k_1(x_1, x_2) &= 6 - \exp(x_1) - \exp(x_2) \geq 0, \\ k_2(x_1, x_2) &= x_1 \geq 0, \\ k_3(x_1, x_2) &= x_2 \geq 0. \end{aligned}$$