Universität Konstanz *SS 2010*
Fachbereich Mathematik und Statistik
J. Schropp, G. Koch

Übungen zu **Optimierung**

http://www.math.uni-konstanz.de/~schropp/optimierung.html

Blatt 4 **Abgabe: 10.6.2010**

Zur Berechnung eines lokalen Minimums von $f \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ betrachten wir ein Abstiegsverfahren

$$x^{k+1} = x^k + t_k d^k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

mit einer Abstiegsrichtung d^k im Punkte x^k und einer Schrittweite $t_k > 0$. Um t_k zu bestimmen, sind die zwei folgenden Regeln gebräuchlich.

- Die Armijo-Regel:
  Sei $\alpha \in [0, 1]$. Zu x, d mit $\nabla f(x)^T d < 0$ wähle man ein $t > 0$ mit
  $$f(x + td) \leq f(x) + \alpha t \nabla f(x)^T d. \tag{1}$$
  Zur Berechnung von t setzt man $s > 0$ und $\beta \in]0, 1[$ fest und testet für
  $$t = s\beta^l, \quad l = 0, 1, 2, \ldots$$
  sukzessive die Bedingung (1). Bei erstmaliger Gültigkeit von (1) bricht man ab und definiert $t = t_k$.

- Die Wolfe-Powell Regel:
  Seien $\alpha \in]0, 1/2[$, $\rho \in [\alpha, 1[$ und x, d mit $\nabla f(x)^T d < 0$ gegeben. Bestimme eine Schrittweite $t > 0$ mit (1) und
  $$\nabla f(x + td)^T d \geq \rho \nabla f(x)^T d. \tag{2}$$

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Vorgelegt sei ein Abstiegsverfahren

$$x^{k+1} = x^k + t_k d^k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

für $f \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, f nach unten beschränkt und d^k, x^k mit $\nabla f(x^k)^T d^k < 0$.

a) Zeigen Sie: Die Wolfe-Powell Schrittweiten-Strategie ist wohldefiniert, d.h. zu x^k, d^k existiert eine Schrittweite $t_k > 0$, $k \in \mathbb{N}$.

b) Ist außerdem die Funktion ∇f auf der Menge $L(x^0) = \{x \in \mathbb{R}^N;\ f(x) \leq f(x^0)\}$ Lipschitz-stetig, so existiert eine Konstante $c > 0$ unabhängig von x^k und d^k mit
$$f(x^k + t_k d^k) \leq f(x^k) - c \left(\frac{\nabla f(x^k)^T d^k}{\|d^k\|_2} \right)^2,$$
wobei $t_k > 0$ mit der Wolfe-Powell Strategie bestimmt wurde. Dies bedeuted, dass die Wolfe-Powell Strategie effizient ist.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \frac{1}{2} x^T Q x + c^T x + \gamma$$

mit $Q \in \mathbb{R}^{N,N}$ symmetrisch und positiv definit, $c \in \mathbb{R}^N$ und $\gamma \in \mathbb{R}$. Ferner seien $x, d \in \mathbb{R}^N$ mit $\nabla f(x)^T d < 0$ beliebig vorgegeben. Zeigen Sie:

a) Die Schrittweite

$$\bar{t} = -\frac{\nabla f(x)^T d}{d^T Q d}$$

liefert den steilsten Abstieg von f entlang der Richtung d, d.h. es gilt

$$f(x + \bar{t}d) < f(x + td) \quad \forall t \in \mathbb{R},\ t \neq \bar{t}.$$

b) Es existiert eine von x, d unabhängige Konstante $c > 0$ mit

$$f(x + \bar{t}d) \leq f(x) - c \left(\frac{\nabla f(x)^T d}{\|d\|_2} \right)^2,$$

d.h. die Schrittweite $\bar{t} > 0$ ist effizient.

Aufgabe 3 (12 Punkte)

Implementieren Sie den Algoritmus `ABSTIEG` aus der Vorlesung in `MATLAB` mit dem Abbruchkriterium $||\nabla f(x^k)||_2 \leq 10^{-3}$. Wählen Sie $d^k = -\nabla f(x^k)/\|\nabla f(x^k)\|_2$ als Abstiegsrichtung und die Armijo-Schrittweiten Strategie.

Testen Sie ihr Programm an den folgenden Funktionen:

a) $f(x) = \cos(x)$ mit dem Startwert $x^0 = 1$

b) $g(x) = (1 - x_1)^2 + 2(2 - x_2)^2$ mit dem Startwert $x^0 = (3, -2)^T$

c) Rosenbrock-Funktion (siehe Blatt 1, Aufgabe 1a)) mit dem Startwert $x^0 = (1, -0.5)^T$

Die Armijo-Parameter seien jedesmal $s = 1, \alpha = 10^{-2}$ und $\beta = 0.5$.

Geben Sie in jedem Iterationsschritt k die Abstiegsrichtung d^k, die Schrittweite t^k und den Funktionswert $f(x^k)$ aus.

Abgabekriterien für die praktischen Übungen:

- Die Programmieraufgaben dürfen in Zweiergruppen bearbeitet werden.
- In den Programmen muß jeder Schritt angemessen kommentiert sein. (Was beschreibt die Variable? Worüber läuft die Schleife? Usw.)
- Bei jeder Abgabe werden 2 Zweiergruppen ausgewählt, welche die Aufgaben direkt beim Übungsleiter vorführen werden.
- Programmieraufgaben per Email bitte an die jeweiligen Übungsleiter: *gilbert.koch@uni-konstanz.de*, *felix.kleber@uni-konstanz.de* oder *michael.pokojovy@uni-konstanz.de.*