Universität Konstanz *SS 2010*
Fachbereich Mathematik und Statistik
J. Schropp, G. Koch

Übungen zu **Optimierung**

http://www.math.uni-konstanz.de/∼schropp/optimierung.html

Blatt 6 **Abgabe: 8.7.2010**

Aufgabe 1 (6 Punkte)

a) Sind $s^k, y^k \in \mathbb{R}^N$ mit $(s^k)^T y^k > 0$ gegeben, und ist $H_k \in \mathbb{R}^{N,N}$ symmetrisch und positiv definit. Dann ist die inverse BFGS-Aufdatierungsmatrix

$$\begin{aligned} H_{k+1} &= (I - \rho_k s^k (y^k)^T) H_k (I - \rho_k y^k (s^k)^T) + \rho_k s^k (s^k)^T, \\ \rho_k &= \frac{1}{(y^k)^T s^k}, \quad k \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

symmetrisch und positiv definit.

b) Für $h : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ sei die Richtungsableitung im Punkte x in Richtung d definiert durch

$$h'(x; d) = \lim_{t \to 0} \frac{h(x + td) - h(x)}{t},$$

falls dieser Grenzwert existiert. Zeigen Sie:

i) Für $h(x) = |x|$ gilt

$$h'(x; d) = \begin{cases} d & \text{für } x > 0 \\ |d| & \text{für } x = 0 \\ -d & \text{für } x < 0 \end{cases} .$$

ii) Für $h(x) = \min(0, x)$ gilt

$$h'(x; d) = \begin{cases} 0 & \text{für } x > 0 \\ \min(0, d) & \text{für } x = 0 \\ d & \text{für } x < 0 \end{cases} .$$

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Sei $B_k \in \mathbb{R}^{N,N}$ symmetrisch und positiv definit, und seien $s^k, y^k \in \mathbb{R}^N$ mit $(s^k)^T y^k > 0$. Ferner sei

$$B_{k+1} = B_k - \frac{B_k s^k (s^k)^T B_k}{(s^k)^T B_k s^k} + \frac{y^k (y^k)^T}{(y^k)^T s^k}, \ k \in \mathbb{N} \tag{1}$$

die BFGS-Aufdatierungsmatrix. Dann gilt

$$\operatorname{tr}(B_{k+1}) = \operatorname{tr}(B_k) - \frac{\| B_k s^k \|_2^2}{(s^k)^T B_k s^k} + \frac{\| y^k \|_2^2}{(y^k)^T s^k}, \quad k \in \mathbb{N}$$

und

$$\det(B_{k+1}) \quad = \quad \det(B_k) \cdot \frac{(y^k)^T s^k}{(s^k)^T B_k s^k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Hinweis: Man schreibe (1) in der Form $B_{k+1} = C_k \cdot (I + u^k (v^k)^T)$ und benutze die Sherman-Morrison-Woodbury Formel sowie die Relation $\det(I + uv^T) = 1 + v^T u$.

Aufgabe 3 (12 Punkte)

Implementieren Sie den Algorithmus `BFGS` aus der Vorlesung mit dem Abbruchkriterium $||\nabla f(x^k)||_2 \leq 10^{-3}$. Verwenden Sie anstatt der Wolfe-Powell Schrittweiten Strategie die bereits programmierte Armijo-Schrittweitensteuerung von Blatt 4. Die Armijo-Parameter seien $s = 1, \alpha = 10^{-2}$ und $\beta = 0.5$.

Testen Sie Ihr Programm an der Rosenbrock-Funktion (siehe Blatt 1) mit dem Startwert $x^0 = (1, -0.5)^T$.

Setzen Sie $H_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Geben Sie in jedem Iterationsschritt k den Parameter x^k, die Hesse-Matrix $\nabla^2 f(x^k)$ sowie ihre BFGS-Approximation $(H_k)^{-1}$ aus.

Abgabekriterien für die praktischen Übungen:

- Die Programmieraufgaben dürfen in Zweiergruppen bearbeitet werden.
- In den Programmen muß jeder Schritt angemessen kommentiert sein. (Was beschreibt die Variable? Worüber läuft die Schleife? Usw.)
- Bei jeder Abgabe werden 2 Zweiergruppen ausgewählt, welche die Aufgaben direkt beim Übungsleiter vorführen werden.
- Programmieraufgaben per Email bitte an die jeweiligen Übungsleiter: *gilbert.koch@uni-konstanz.de*, *felix.kleber@uni-konstanz.de* oder *michael.pokojovy@uni-konstanz.de.*