Übungsaufgaben zum **Vorkurs Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler**

Übungsblatt 1 – Lösungen

Aufgabe 1

a)

$$5xy^2 + 10x^2y = 5xy(y + 2x),$$
$$3xy^2z^3 - 12x^2y^3z + 9x^3yz^2 = 3xyz\left(yz^2 - 4xy^2 + 3x^2z\right).$$

b)

$$16 - y^2 = (4 + y)(4 - y),$$
$$20rs + 100r^2 + s^2 = (s + 10r)^2,$$
$$4a^2 - 24a + 36 = (2a - 6)^2.$$

Aufgabe 2

a)

$$(ab)^2b^n = a^2b^{n+2},$$
$$x^{m-2}x^{-m+2} = x^{m-2-m+2} = x^0 = 1,$$
$$\frac{(x+y)^{-2}}{x+y} = \frac{1}{(x+y)(x+y)^2} = \frac{1}{(x+y)^3}.$$

b)

$$\sqrt{n^2 + 2n + 1} = \sqrt{(n+1)^2} = n + 1,$$
$$\sqrt{\frac{x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3}{x+y}} = \sqrt{\frac{(x+y)^3}{(x+y)}} = \sqrt{(x+y)^2} = x + y,$$
$$\frac{\sqrt{49x^3}}{7\sqrt{x}} = \frac{7\sqrt{x^3}}{7\sqrt{x}} = \sqrt{x^2} = x.$$

c)

$$\ln\left(\frac{a^3b^2c}{d^4}\right) = 3\ln(a) + 2\ln(b) + \ln(c) - 4\ln(d),$$
$$\ln\left(u^2 - 1\right) = \ln((u-1)(u+1)) = \ln(u-1) + \ln(u+1).$$

Aufgabe 3

a)

$$\begin{aligned} x+2y+3z&=2 \\ x+y+z&=2 \\ 3x+3y+z&=0 \end{aligned} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{aligned} x+2y+3z&=2 \\ y+2z&=0 \\ 3y+8z&=6 \end{aligned} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{aligned} x+2y+3z&=2 \\ y+2z&=0 \\ -2z&=-6 \end{aligned} \; .$$

Dies liefert aus der letzten Zeile (rechtes Gleichungssystem): $z = 3$.

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad y = -2 \cdot 3 = -6 \\ &\Rightarrow \quad x = 2 - 2 \cdot (-6) - 3 \cdot 3 = 5, \end{aligned}$$

d. h. $\mathbb{L} = \{(5, -6, 3)\}$.

Aufgabe 4

a) (i)

$$2x^3 + 4x^2 + 3x = 0 \quad\Leftrightarrow\quad 2x\left(x^2 + 2x + \frac{3}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \text{oder} \quad x = -1 \pm \sqrt{-\frac{1}{2}}, \quad \text{keine Lösung!}$$

D. h. $\mathbb{L} = \{0\}$.

(ii) Die angegebene Gleichung ist eine biquadratische Gleichung, mache also die Substitution $z = x^2$. Erhalte so eine Gleichung in z:

$$z^2 - 13z + 36 = 0.$$

Diese Gleichung hat die Lösung

$$z = \frac{13}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{13}{2}\right)^2 - 36} = \frac{13}{2} \pm \frac{5}{2} = \begin{cases} 9 \\ 4 \end{cases}.$$

Rücksubstitution liefert:

$$\begin{aligned} x^2 = z = 9 \quad &\text{oder} \quad x^2 = z = 4 \qquad \Leftrightarrow \\ x = \pm 3 \quad &\text{oder} \quad x = \pm 2. \end{aligned}$$

Lösung insgesamt: $\mathbb{L} = \{-3, -2, 2, 3\}$.

b) Die p-q-Formel liefert für die gegebene Gleichung

$$x = 1 \pm \sqrt{1 - c},$$

also gilt: Die Gleichung hat für

1. $c = 1$ genau eine Lösung, nämlich $x = 1$,
2. $c < 1$ genau zwei Lösungen, nämlich $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 - c}$,
3. $c > 1$ keine Lösung, da in diesem Fall $1 - c < 0$ gilt.

Aufgabe 5

a) Bruchgleichung: $\frac{3x}{x-2} = \frac{2x+7}{x+3} + \frac{6}{x-2}$.

1. Definitionsmenge: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{2, -3\}$.
2. Hauptnenner: $(x-2) \cdot (x+3)$.
3. Gleichung mit Hauptnenner:

$$\frac{3x(x+3)}{(x-2)(x+3)} = \frac{(2x+7)(x-2)}{(x+3)(x-2)} + \frac{6(x+3)}{(x-2)(x+3)},$$

anschließend mit Hauptnenner durchmultiplizieren:

$$3x(x+3) = (2x+7)(x-2) + 6(x+3).$$

4. Bruchfreie Gleichung lösen:

$$\begin{aligned} 3x(x+3) = (2x+7)(x-2) + 6(x+3) \quad &\Leftrightarrow \\ 3x^2 + 9x = 2x^2 + 3x - 14 + 6x + 18 \quad &\Leftrightarrow \\ x^2 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm 2. & \end{aligned}$$

Da $2 \notin \mathbb{D}$, folgt $\mathbb{L} = \{-2\}$.

b) Wurzelgleichung: $2 + \sqrt{3x(x-2)} = x$.

1. Wurzel isolieren: $\sqrt{3x(x-2)} = x - 2$.
2. Quadrieren: $3x(x-2) = x^2 - 4x + 4$.
3. Wurzelfreie Gleichung lösen:

$$\begin{aligned} 3x(x-2) = x^2 - 4x + 4 \quad &\Leftrightarrow \\ 2x^2 - 2x - 4 = 0 \quad &\Leftrightarrow \\ x^2 - x - 2 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}. \end{aligned}$$

4. Kontrolle:

$$\begin{aligned} x_1 = 2: &\quad 2 + \sqrt{3 \cdot 2(2-2)} = 2 \quad \checkmark, \\ x_2 = -1: &\quad 2 + \sqrt{3 \cdot (-1)(-1-2)} = -1 \quad \Leftrightarrow \\ &\quad 2 + \sqrt{9} = -1 \quad \Leftrightarrow \\ &\quad 5 = -1, \quad \text{Widerspruch}, \end{aligned}$$

d. h. $\mathbb{L} = \{2\}$.

Aufgabe 6

(i) $\frac{x}{x+2} < 0, \quad x \neq -2$:

Diese Ungleichung ist für folgende zwei Fälle gültig.

$$\begin{array}{llcll}
\underline{\text{Fall 1:}} & x > 0 & \text{und} & x + 2 < 0 & \Leftrightarrow \\
 & x > 0 & \text{und} & x < -2, & \\
\underline{\text{Fall 2:}} & x < 0 & \text{und} & x + 2 > 0 & \Leftrightarrow \\
 & x < 0 & \text{und} & x > -2. &
\end{array}$$

Fall 1 ist nicht möglich, also bleibt nur Fall 2 übrig und wir erhalten

$$\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} : x < 0 \;\text{ und }\; x > -2\} = (-2, 0).$$

(ii) $\frac{x+1}{x-1} \leq 2, \quad x \neq 1$:

Ungleichung bruchfrei schreiben mittels Fallunterscheidungen.

Fall 1: $x - 1 > 0 \;\Leftrightarrow\; x > 1$:

$$\begin{aligned}
\frac{x+1}{x-1} \leq 2 \quad &\Leftrightarrow \quad x + 1 \leq 2(x-1) \\
&\Leftrightarrow \quad x \geq 3,
\end{aligned}$$

d. h. $\mathbb{L}_1 = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 3 \;\text{ und }\; x > 1\} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 3\}$.

Fall 2: $x - 1 < 0 \;\Leftrightarrow\; x < 1$:

$$\begin{aligned}
\frac{x+1}{x-1} \leq 2 \quad &\Leftrightarrow \quad x + 1 \geq 2(x-1) \\
&\Leftrightarrow \quad x \leq 3,
\end{aligned}$$

d. h. $\mathbb{L}_2 = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 3 \;\text{ und }\; x < 1\} = \{x \in \mathbb{R} : x < 1\}$.

Insgesamt:

$$\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 3 \;\text{ oder }\; x < 1\} = (-\infty, 1) \cup [3, \infty).$$

Aufgabe 7

Da $a \neq 0$, können wir folgende Äquivalenzumformungen durchführen:

$$\begin{aligned}
ax^2 + bx + c = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \\
&\Leftrightarrow \quad x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 8

Gegeben: $f(x) = -2x - 2$, $g(x) = 2x^2 + 8x + 6$.

a) Scheitelpunkt von g mittels quadratischer Ergänzung:

$$\begin{aligned} g(x) &= 2x^2 + 8x + 6 = 2(x^2 + 4x + 3) = 2(x^2 + 4x + 2^2 - 2^2 + 3) \\ &= 2((x+2)^2 - 1) = 2(x+2)^2 - 2, \end{aligned}$$

d. h. der Scheitelpunkt ist $S = (-2, -2)$.

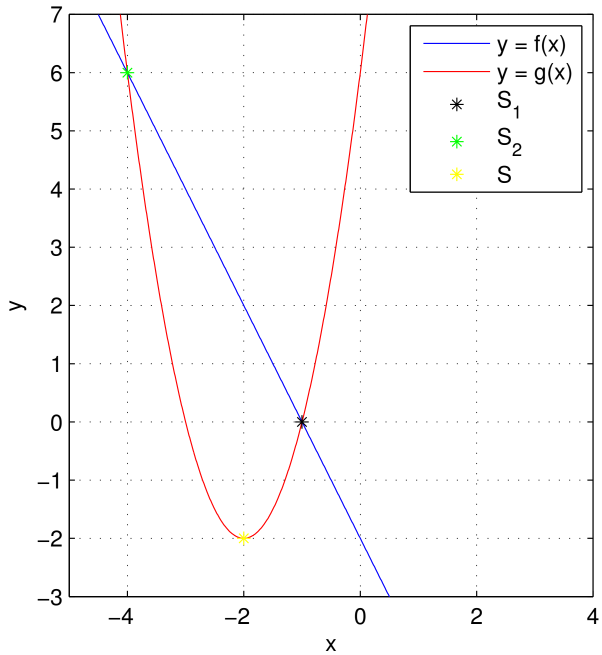

Abbildung 1: Schaubild zu Aufgabe 8.

Aufgabe 9

a) Gegeben: $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$.

Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(0) = -1$, d. h. $S_y = (0, -1)$.

Schnittpunkte mit der x-Achse:

$$\begin{aligned} f(x) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{x^2-1}{x^2+1} \\ &\Leftrightarrow \quad x^2 - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x = \pm 1, \end{aligned}$$

d. h. $N_1 = (-1, 0)$, $N_2 = (1, 0)$.

b) Gegeben: $f(x) = 4 - \frac{6}{x}$, $x \geq 1$. Die Funktion f hat folgende Eigenschaften:

- $f(1) = 4 - 6 = -2$;
- für $x \to \infty$ gilt: $f(x) = 4 - \frac{6}{x} \to 4$, da $-\frac{6}{x} \to 0$ für $x \to \infty$;
- f ist streng monoton wachsend auf $\mathbb{D}_f$.

Damit gilt: f ist sowohl nach unten als auch nach oben beschränkt, und zwar durch $-2 \leq f(x) < 4$, $x \in \mathbb{D}_f$.

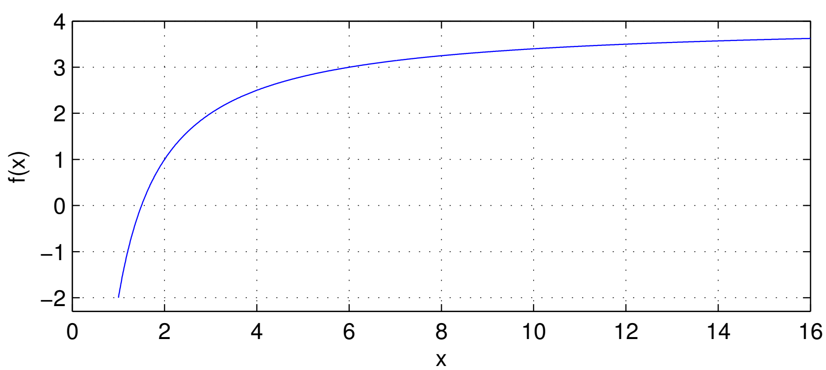

Abbildung 2: Schaubild von f zu Aufgabe 9 b).

c) Der Radikand von $f(x) = \sqrt{-x^2 + 4x - 3}$ muss größer gleich Null sein:

$$-x^2 + 4x - 3 \geq 0. \tag{1}$$

Es gilt:

$$-x^2 + 4x - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases}.$$

Da der Ausdruck $-x^2 + 4x - 3$ eine nach unten geöffnete Parabel beschreibt, ist (1) für $x \in [1, 3]$ erfüllt und wir erhalten für den Definitionsbereich

$$\mathbb{D}_f = \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x \leq 3\} = [1, 3].$$

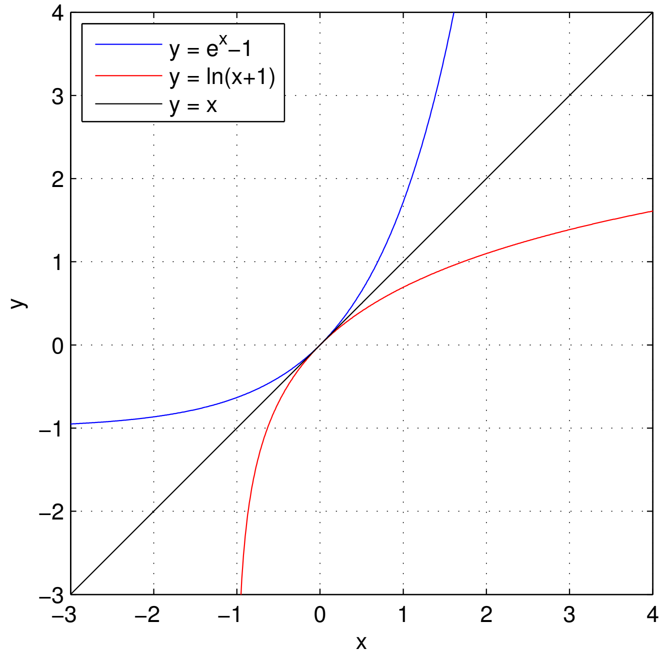

Abbildung 3: Schaubild von f und f^{-1} zu Aufgabe 10 a).

Aufgabe 10

a) Die Exponentialfunktion ist streng monoton steigend, also ist dies auch die Funktion $f(x) = \mathrm{e}^x - 1$, d. h. die Umkehrfunktion f^{-1} existiert:

- auflösen der Gleichung $y = \mathrm{e}^x - 1$ nach x:

$$y = \mathrm{e}^x - 1 \quad \Leftrightarrow \quad y + 1 = \mathrm{e}^x \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln(y + 1).$$

- Variablentausch: $y = \ln(x + 1)$.

Also gilt: $f^{-1}(x) = \ln(x + 1)$.