Übungsaufgaben zum **Vorkurs Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler**

Übungsblatt 2 – Lösungen

Aufgabe 1

Gegeben: $f(x) = 2\cos(x) + 1$.

a) Beachte zunächst: Es gilt $\cos(x) \leq 1$ sowie $\cos(x) \geq -1$, und zwar für alle $x \in \mathbb{R}$.

- Damit gilt $f(x) \leq 2 \cdot 1 + 1 = 3$, d. h. 3 ist das Maximum. Für die zugehörigen x-Werte gilt

$$f(x) = 3 \;\Leftrightarrow\; \cos(x) = 1 \;\Leftrightarrow\; x = 2n\pi,\; n \in \mathbb{Z}.$$

- Analog gilt $f(x) \geq 2 \cdot (-1) + 1 = -1$, d. h. -1 ist das Minimum. Für die zugehörigen x-Werte gilt

$$f(x) = -1 \;\Leftrightarrow\; \cos(x) = -1 \;\Leftrightarrow\; x = (2n+1)\pi,\; n \in \mathbb{Z}.$$

b) Wir zeichnen die Funktion f ausgehend von der Cosinus-Funktion $y = \cos(x)$:

1. $y = 2\cos(x)$: Streckung in y-Richtung mit dem Faktor 2, vgl. Abbildung 1.
2. $y = 2\cos(x) + 1$: Verschiebung um 1 in y-Richtung, vgl. Abbildung 1.

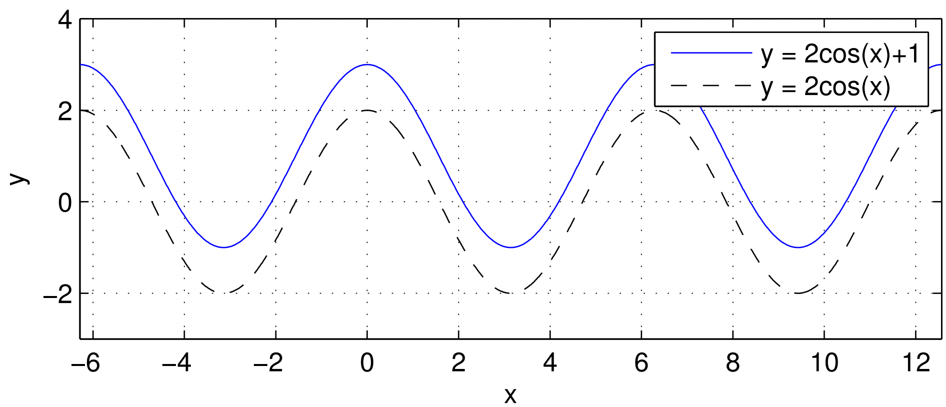

Abbildung 1: Zu Aufgabe 2 b), 2.

Aufgabe 2

Gegeben: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

(i) Diese Eigenschaft ergibt für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(x) = -f(-x) \quad &\Leftrightarrow \quad ax^3 + bx^2 + cx + d = -\big(a(-x)^3 + b(-x)^2 + c(-x) + d\big) \\ &\Leftrightarrow \quad ax^3 + bx^2 + cx + d = ax^3 - bx^2 + cx - d \\ &\Leftrightarrow \quad bx^2 + d = -bx^2 - d \\ &\Leftrightarrow \quad bx^2 = -d. \end{aligned}$$

Da diese Eigenschaft für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, folgt speziell für $x = 0$:

$$b \cdot 0^2 = -d \quad \Leftrightarrow \quad d = 0.$$

Setzen wir nun in die Bedingung $bx^2 = 0$ z. B. den Wert $x = 1$ ein, so folgt:

$$b \cdot 1^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad b = 0.$$

Also erhalten wir

$$f(x) = ax^3 + cx.$$

(ii) Für obiges f gilt nun mit dieser Eigenschaft

$$f(1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a \cdot 1^2 + c \cdot 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = -c,$$

d. h. die gesuchte Funktion lautet für $a \in \mathbb{R}$

$$f(x) = ax^3 - ax = ax(x^2 - 1).$$

Als Beispiel können wir $a = 2$ setzen:

$$f(x) = 2x(x^2 - 1).$$

Aufgabe 3

Die kritische Stelle ist $x = 1$. Für dieses x gilt nach Definition der Funktion

$$f(1) = a \cdot 1 - 1 = a - 1.$$

Damit die Funktion stetig ist, muss gelten

$$a - 1 = 3 \cdot 1^2 + 1 \quad \Leftrightarrow \quad a = 5.$$

(Für dieses a stimmen links- und rechtsseitiger Grenzwert mit dem Wert $f(1) = 4$ überein.)

Zur Differenzierbarkeit bei $x_0 = 1$ für $a = 5$: Für den rechtsseitigen Grenzwert des Differenzenquotienten gilt

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \searrow 0} \frac{3(1+h)^2 + 1 - (3 \cdot 1^2 + 1)}{h} = \lim_{h \searrow 0} (6 + 3h) = 6.$$

Für den linksseitigen Grenzwert des Differenzenquotienten erhalten wir

$$\lim_{h \nearrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \nearrow 0} \frac{5(1+h) - 1 - (5 \cdot 1 - 1)}{h} = \lim_{h \nearrow 0} 5 = 5.$$

D. h. rechts- und linksseitiger Grenzwert des Differenzenquotienten stimmen nicht überein und damit existiert der Grenzwert

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

nicht. Also ist f bei $x_0 = 1$ für $a = 5$ nicht differenzierbar (anschaulich hat die Funktion bei $x_0 = 1$ einen Knick!).

Aufgabe 4

a) $f(x) = (3x^5 - 2x^2)(1 - 2x^4)$:

$$\begin{aligned} \mathbb{D}_f &= \mathbb{R}, \\ f'(x) &= (15x^4 - 4x)(1 - 2x^4) + (3x^5 - 2x^2)(-8x^3) \\ &= 15x^4 - 30x^8 - 4x + 8x^5 - 24x^8 + 16x^5 \\ &= -54x^8 + 24x^5 + 15x^4 - 4x. \end{aligned}$$

b) $f(x) = \frac{3x^2 - 2\exp(x)}{x^2+1}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{D}_f &= \mathbb{R}, \\ f'(x) &= \frac{(6x - 2\exp(x))(x^2+1) - (3x^2 - 2\exp(x)) \cdot 2x}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{6x^3 + 6x - 2\exp(x)(x^2+1) - 6x^3 + 4x\exp(x)}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{6x - 2\exp(x)(x^2 - 2x + 1)}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{6x - 2\exp(x)(x-1)^2}{(x^2+1)^2}. \end{aligned}$$

c) $f(x) = \ln(\sqrt{3x^2+5})$:

$$\begin{aligned} \mathbb{D}_f &= \mathbb{R}, \\ f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{3x^2+5}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{3x^2+5}} \cdot 6x \\ &= \frac{3x}{3x^2+5}. \end{aligned}$$

Aufgabe 5

a) $f(x) = 1 + x + x^4$:

$$F(x) = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{5}x^5 + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

b) $f(x) = \exp(x) + x^{3/2}$:

$$F(x) = \exp(x) + \frac{2}{5}x^{5/2} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

c) $f(x) = \sin(6x)$: Analog zu d) setze $z = 6x$ und erhalte

$$F(x) = \int \sin(6x)\,dx = \frac{1}{6}\int \sin(z)\,dz = \frac{1}{6}(-\cos(z)) + C = -\frac{1}{6}\cos(6x) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 6

Mittels „linearer Substitution“ erhalten wir zunächst mit $z = 2x - 1$

$$\int \sqrt{2x-1}\,dx = \frac{1}{2}\int \sqrt{z}\,dz = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}z^{3/2} + C = \frac{1}{3}(2x-1)^{3/2} + C.$$

Damit gilt

$$\int_{\frac{1}{2}}^{5} \sqrt{2x-1}\,dx = \frac{1}{3}(2x-1)^{3/2}\Big|_{\frac{1}{2}}^{5} = 9.$$

Als geometrische Interpretation ergibt sich die Fläche zwischen der Kurve von $y = \sqrt{2x-1}$ und der x-Achse, begrenzt durch $\frac{1}{2}$ und 5, vgl. Abbildung 2.

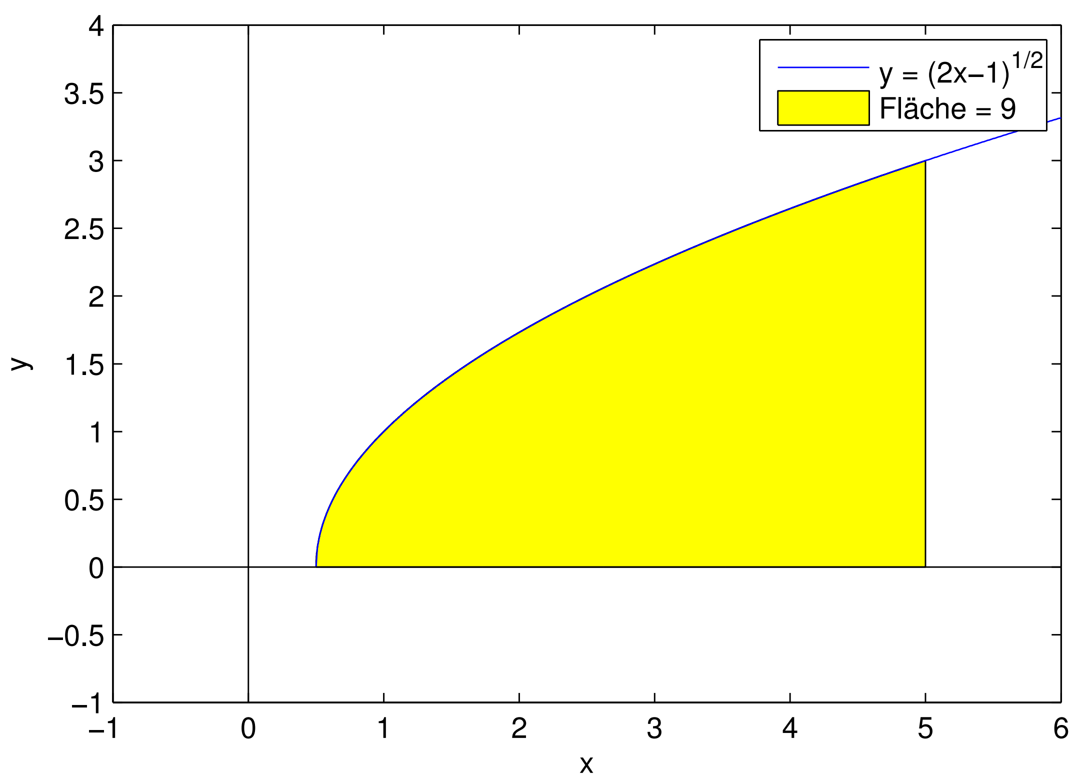

Abbildung 2: Geometrische Interpretation zu Aufgabe 6.

Aufgabe 7

Gegebene Bedingungen:

(i) $f'(x) = 3f(x)$,

(ii) $f(0) = 2$.

Zu (i): Eine Funktion, die sich beim Ableiten nicht ändert, ist die Exponentialfunktion. Da in der Bedingung (i) diese Eigenschaft bis auf den Faktor 3 vorliegt, muss es sich hier um eine gestauchte bzw. gestreckte Exponentialfunktion handeln.

Wir machen also folgenden Ansatz:

$$f(x) = a \cdot \exp(c \cdot x) \quad \text{mit zwei Konstanten} \quad a, c \in \mathbb{R}.$$

Ableiten ergibt

$$f'(x) = a \exp(cx) \cdot c = cf(x) \quad \overset{(i)}{\Rightarrow} \quad c = 3,$$

also erhalten wir für beliebiges $a \in \mathbb{R}$

$$f(x) = a \exp(3x).$$

Zu (i) und (ii): Falls beide Bedingungen erfüllt sein sollen, muss zusätzlich

$$2 = f(0) = a \exp(3 \cdot 0) = a$$

gelten. Dies liefert die gesuchte Funktion

$$f(x) = 2 \exp(3x).$$

Bemerkung:

Bei der Bedingung (i) handelt es sich um eine sogenannte Differentialgleichung. Die Bedingungen (i) und (ii) zusammen werden ein Anfangswertproblem genannt.