Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler I

Prof. Dr. J. Schropp
Universität Konstanz

Typesetting S. Ringmann

28. Januar 2025

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Grundbestandteile

1.1 Einführung

1.1.1 Beschreibung mit Modellen

Ein Modell ist im allgemeinen eine Idealisierung der Wirklichkeit.

Beispiel: Die Nachfrage q^N nach einer Ware sei gegeben durch: $q^N = a - bp + cy$

$a, b, c > 0$	Parameter
y	Einkommen
p	Standardpreis

d.h. eine Erhöhung von p um einen Euro bewirkt ein Absinken um b Einheiten, eine Einkommenserhöhung um einen Euro erhöht die Nachfrage um c Einheiten.
Angenommen, die Liefermenge dieser Ware ist limitiert durch q^L und der im Markt durchgesetzte Preis ist gegeben durch Nachfrage gleich Liefermenge:

$$\begin{aligned} a - bp + cy &= q^N = q^L \\ a + cy &= q^L + bp \\ p &= \tfrac{a+cy-q^L}{b} \end{aligned}$$

Grundbestandteile der Modellierung sind also Zahlen und Funktionen zur Beschreibung von Größen und Abhängigkeiten.

1.1.2 Mengen

Verschiedene zu einer Gesamtheit zusammengefasste Objekte nennt man Menge.
Endliche Mengen lassen sich durch Aufzählen ihrer Elemente definieren, z.B. M=$\{1, 2, 3\}$.

Allgemeiner Fall: $M = \{x|$ x hat Eigenschaft E$\}$
$M = \{x|$ x ist eine durch 4 teilbare natürliche Zahl$\} = \{4, 8, 12, \ldots\}$

Zwei Mengen M und N sind gleich, falls sie die gleichen Elemente enthalten. Schreibe: M=N

Mengenoperationen: Seien A,B Mengen.

$A \cap B$	$= \{x| x \in A$ und $x \in B\}$	"Durchschnitt"
$A \cup B$	$= \{x| x \in A$ oder $x \in B\}$	"Vereinigung"
$A \backslash B$	$= \{x| x \in A$ und $x \notin B\}$	"Differenz"

A heißt Teilmenge von B, falls jedes Element von A auch Element von B ist. Schreibe: $A \subset B$
$\emptyset$ heißt leere Menge, d.h. die Menge die kein Element enthält.

Regeln für Mengen: Seien A,B beliebige Mengen.

$A \cap B \subset A$
$A \cap B \subset B$
$A \cup B \supset A$
$A \cup B \supset B$

$A \subset A$
$\emptyset \subset A$

1.1.3 Zahlen

Es ist	$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$	Menge der natürlichen Zahlen
	$\mathbb{Z} := \{\pm j \mid j \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$	Menge der ganzen Zahlen
	$\mathbb{Q} := \{\frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0\}$	Menge der rationalen Zahlen

Es gilt $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Bemerkung: Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ liegen auf der Zahlengeraden dicht, sie hinterlassen aber Lücken. Diese Lücken werden durch Zahlen ausgefüllt, welche zusammen mit $\mathbb{Q}$ reelle Zahlen $\mathbb{R}$ genannt werden. Offenbar gilt $\pi \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, $\sqrt{2} \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$

Eigenschaften reeller Zahlen:

Seien $a, b \in \mathbb{R}$

$a + b \in \mathbb{R}, \quad a \cdot b \in \mathbb{R}$	"Abgeschlossenheit unter Addition und Multiplikation"
$a + b = b + a$	"Kommutativität"
$a + (b + c) = (a + b) + c$	"Assoziativität"
$a(b + c) = ab + ac$	"Distributivität"

Es gibt ein Element $0 \in \mathbb{R}$ mit $a + 0 = a,\ a \cdot 0 = 0$
Es gibt ein Element $1 \in \mathbb{R}$ und $1 \cdot a = a$
Zu $a \in \mathbb{R}$ gibt es ein Element $(-a) \in \mathbb{R}$ und $a + (-a) = 0$
Zu $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ gibt es ein Element $\left(\frac{1}{a}\right) \in \mathbb{R}$ und $a \cdot \left(\frac{1}{a}\right) = 1$

Man sagt: $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ist Körper.

Weitere Eigenschaften reeller Zahlen:
$\mathbb{R}$ ist angeordnet, d.h. für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt: $a < b$ oder $a = b$ oder $a > b$.

$\mathbb{R}$ hinterlässt auf dem Zahlenstrahl keine Lücken, d.h. zu jedem Punkt auf dem Zahlenstrahl gibt es genau eine reelle Zahl und umgekehrt. "Vollständigkeit von $\mathbb{R}$"

Kurz: $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ist ein vollständig angeordneter Körper.

Zu $a \in \mathbb{R}$ definiert man $|a| := \begin{cases} a, & \text{falls } a \geq 0 \\ -a, & \text{falls } a < 0 \end{cases}$

Beträge dienen der Abstandsmessung auf dem Zahlenstrahl.

Beispiel: $a = -1,\ b = 3 \quad \Rightarrow \quad$ Distanz $d = |a - b| = |-1 - 3| = |-4| = 4$

Rechenregeln:
$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
$|a + b| \leq |a| + |b|$ für $a, b \in \mathbb{R}$, "Dreiecksungleichung"

Mit Hilfe der Anordnung können Intervalle definiert werden.
Definition (Intervalle): Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$:

$[a, b] = \{t \in \mathbb{R} \mid a \leq t \leq b\}$	"abgeschlossen"
$(a, b] = \{t \in \mathbb{R} \mid a < t \leq b\}$	"links halboffen"
$[a, b) = \{t \in \mathbb{R} \mid a \leq t < b\}$	"rechts halboffen"
$(a, b) = \{t \in \mathbb{R} \mid a < t < b\}$	"offen"

Ferner schreibt man:
$$[a,\infty) = \{t \in \mathbb{R} |\ t \geq a\}$$
$$(-\infty,a] = \{t \in \mathbb{R} |\ t \leq a\}$$
$$(-\infty,\infty) = \mathbb{R}$$

Zentrierte Intervalle:

Sei $\varepsilon > 0$. Unter einer ε-Umgebung $U_\varepsilon(a)$ eines Punktes $a \in \mathbb{R}$ versteht man das offene Intervall $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) = U_\varepsilon(a)$.

In $U_\varepsilon(a) = (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ liegen also die Zahlen x mit $|x-a| < \varepsilon$
Bsp.: $U_{0.1}(2) = (1.9, 2.1)$

Rechenregeln für das Rechnen mit Ungleichungen: Seien $x, y, u, v \in \mathbb{R}$.

$x \leq y,\ y \leq v \ \Rightarrow\ x \leq v$
$x \leq y,\ u \leq v \ \Rightarrow\ x + u \leq y + v$
$x \leq y,\ a \geq 0 \ \Rightarrow\ ax \leq ay$
$x \leq y,\ a < 0 \ \Rightarrow\ ax \geq ay$

Der " $\Rightarrow$ " bedeuted, dass die Aussage auf der Spitze des Pfeiles gültig ist, falls die Voraussetzung auf der anderen Seite angenommen wird.

Ein " $\Leftrightarrow$ " bedeuted, dass die Aussage auf der linken Seite genau dann wahr ist, wenn dies für die rechte Seite gilt.

1.2 Funktionen

1.2.1 Der Funktionsbegriff und Beispiele

Definition: Seien A, B Mengen. Eine Funktion $f : A \to B$ ist eine Vorschrift, welche jedem $x \in A$ genau ein Element $f(x) \in B$ zuordnet. Wir nennen A den Definitionsbereich und B den Bildbereich. Die Menge

$$f(A) \quad = \quad \{y \in B;\ y = f(x) \text{ für ein } x \in A\}$$

heißt Wertebereich.

Beispiele für Funktionen:

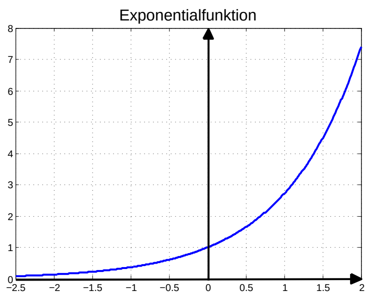
$f(x) = ax + b$	$x \in \mathbb{R},\ a, b$ Parameter	Gerade mit Steigung a und Achsenabschnitt b
$f(x) = \frac{\alpha}{x}$	$x \neq 0,\ \alpha > 0$	Hyperbel
$f(x) = \exp(x)$	$x \in \mathbb{R}$	Exponentialfunktion

exp(1)=e=2.718... Eulersche Zahl
exp(0)=1

$\exp(x) \overset{x\to\infty}{\longrightarrow} \infty$

$\exp(x) \overset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0$

$\exp(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$



Funktionalgleichung der Exponentialfunktion: $\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y) \quad x, y \in \mathbb{R}$

- $\exp(x) \cdot \exp(-x) = \exp(x + (-x)) = \exp(0) = 1$
- $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$
- $\exp(nx) = \exp(x + (n-1)x) = \exp(x) \cdot \exp((n-1)x) = \exp(x) \cdot \exp(x + (n-2)x)$
  $= \exp(x)^2 \cdot \exp((n-2)x) = \ldots = \exp(x)^n$

Manchmal schreibt man auch $\exp(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

1.2.2 Potenzen und Wurzeln

Sei $a \in \mathbb{R}$. Setze $a^n := \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{n-mal}}$, $\quad a^0 = 1, \quad n \in \mathbb{N} \qquad$ "n-te Potenz von a"

Sei $a \geq 0$. Zu jedem $a \geq 0$ gibt es genau eine reelle Zahl $x > 0$, welche die Gleichung $x^n = a$ lässt.
Diese eindeutige Lösung bezeichnen wir mit $x = a^{\frac{1}{n}}$ oder $x = \sqrt[n]{a}$.

Es gilt: $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = (\sqrt[n]{a})^n = a, \quad n \in \mathbb{N}$. Für $n = 2$ schreibt man kurz $x = \sqrt{a}$.

Setze ferner für jede positive rationale Zahl $\frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N},\ q \neq 0$: $\qquad a^{\frac{p}{q}} = (a^p)^{1/q} = \sqrt[q]{a^p}$

Setze außerdem: $a^{\frac{-p}{q}} = \frac{1}{a^{\frac{p}{q}}} \quad$ für $a > 0$

Insgesamt: Potenz a^x für $a > 0,\ x \in \mathbb{Q}$ ist erklärt.

Es gelten die folgenden Potenzgesetze:

$a^x a^y = a^{x+y}$
$(a^x)^y = a^{xy}$
$a^x \cdot b^x = (ab)^x \qquad x, y \in \mathbb{Q},\ a, b > 0$

1.2.3 Polynome und rationale Funktionen

Sei p ein Polynom, d.h.

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m = \sum_{j=0}^{m} a_j x^j \qquad a_0, a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R},\ a_m \neq 0$$

m heißt der Grad von p. Dabei bezeichnet $\sum$ das Summenzeichen, j den Summationsindex, 0 die untere und m die obere Summationsgrenze.

Indexverschiebung: $\sum\limits_{i=0}^{k} a_i = \sum\limits_{i=1}^{k+1} a_{i-1} = \sum\limits_{l=-1}^{k-1} a_{l+1}$

Rationale Funktionen sind Funktionen der Form $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ mit p,q Polynome, d.h.

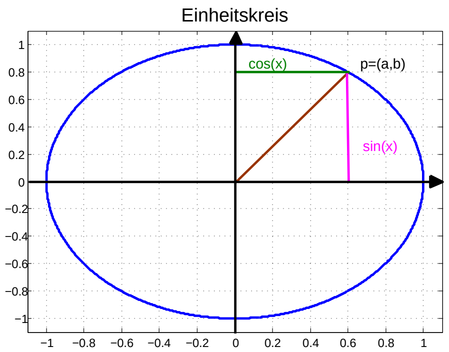
$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \quad \text{mit} \quad p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m = \sum_{j=0}^{m} a_j x^j, \quad q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k$$

mit $a_m, b_n \neq 0$.

$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ ist definiert für $x \in D = \{x \in \mathbb{R};\ q(x) \neq 0\}$.

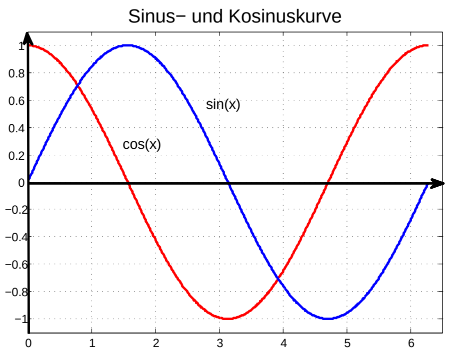
1.2.4 Trigonometrische Funktionen

Die Trigonometrischen Funktionen heißen Kreisfunktionen, die sich ihre Werte auf dem Einheitskreis, d.h. Kreis mit Radius 1 um den Ursprung, ablesen lassen.



Umfang U des Einheitskreises ist $U = 2\pi$

Zu jedem p auf dem Rand gibt es genau eine Bogenlänge $x \in [0, 2\pi)$, welche p charakterisiert.
Die a-Koordinate p_1 von p heißt cos(x) und die b-Koordinate p_2 heißt sin(x), $x \in \mathbb{R}$.



Es gilt:

$x = 0$	$\sin(0) = 0$
	$\cos(0) = 1$
$x = \frac{\pi}{2}$	$\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$
	$\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$
$x = \pi$	$\sin(\pi) = 0$
	$\cos(\pi) = -1$
$x = \frac{3\pi}{2}$	$\sin(\frac{3\pi}{2}) = -1$
	$\cos(\frac{3\pi}{2}) = 0$
$x = 2\pi$	$\sin(2\pi) = 0$
	$\cos(2\pi) = 1$

Nach 2π-Einheiten wiederholt sich alles!

Offensichtlich gilt:

$$\begin{aligned}
&\sin(x + 2k\pi) = \sin(x), \; k \in \mathbb{Z}, \\
&\cos(x + k2\pi) = \cos(x), \; k \in \mathbb{Z}, \\
&-1 \leq \sin(x) \leq 1, \\
&-1 \leq \cos(x) \leq 1 \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Satz des Pythagoras:

$$1 = \sin^2(x) + \cos^2(x) \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

Aus der Zeichnung liest man ab:
$$\begin{aligned}
&\sin(-x) = -\sin(x) \\
&\cos(x) = \sin(x + \tfrac{\pi}{2}) \\
&\cos(x) = \cos(-x), \; x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

1.2.5 Qualitative Eigenschaften

Sei $f : D \to \mathbb{R}, \quad D \subset \mathbb{R}$ Intervall.

- f heißt streng monoton wachsend: $x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) < f(x_2), \qquad x_1, x_2 \in D$
- f heißt monoton wachsend: $x_1 \le x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) \le f(x_2), \qquad x_1, x_2 \in D$
- f heißt streng monoton fallend: $x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) > f(x_2), \qquad x_1, x_2 \in D$
- f heißt monoton fallend: $x_1 \le x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) \ge f(x_2), \qquad x_1, x_2 \in D$

<u>Nachweis der Monotonie:</u>

- Sei $f(x) = ax + b$ und $a > 0,\ x \in \mathbb{R}$. Es gilt:
  $$\begin{aligned} x_1 < x_2 \quad &\Rightarrow \quad ax_1 < ax_2 \\ &\Rightarrow \quad ax_1 + b < ax_2 + b \\ &\Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2) \\ &\Rightarrow \quad \text{f streng monoton wachsend auf } \mathbb{R} \end{aligned}$$
- Sei $f(x) = \frac{\alpha}{x}, \quad x > 0,\ \alpha > 0.$
  $$\begin{aligned} \text{Sei } 0 < x_1 < x_2 \quad &\Rightarrow \quad \tfrac{x_1}{x_1 x_2} < \tfrac{x_2}{x_1 x_2} \\ &\Rightarrow \quad \tfrac{1}{x_2} < \tfrac{1}{x_1} \\ &\Rightarrow \quad \tfrac{\alpha}{x_2} < \tfrac{\alpha}{x_1} \\ &\Rightarrow \quad f(x_2) < f(x_1) \\ &\Rightarrow \quad \text{streng monoton fallend für } x > 0 \end{aligned}$$
  Analog für $x_1 < x_2 < 0$.

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, und sei $D \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Es seien $x_1, x_2 \in D$ und $x_1 < x_2$. Für $\lambda \in [0, 1]$ liefert

$$\tilde{x} = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$$

einen Punkt auf der Strecke von x_2 nach x_1.

<u>Definition:</u>

- f heißt konkav [strikt konkav] auf D, falls: $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \ge [>] \lambda \cdot f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$ $x_1, x_2 \in D,\ 0 < \lambda < 1$
- f heißt konvex [strikt konvex] auf D, falls: $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \le [<] \lambda \cdot f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$ $x_1, x_2 \in D,\ 0 < \lambda < 1$

<u>Beispiel:</u> $f(x) = x^2, \quad x \in \mathbb{R}$. Zeige f(x) ist konvex auf $\mathbb{R}$. Sei $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda \in (0, 1)$.

$$\begin{aligned} f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) - \lambda f(x_1) - (1-\lambda) f(x_2) \quad &= \quad (\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)^2 - \lambda x_1^2 - (1-\lambda)x_2^2 \\ &= \quad \lambda^2 x_1^2 + 2\lambda x_1(1-\lambda)x_2 + (1-\lambda)^2 x_2^2 - \lambda x_1^2 - (1-\lambda)x_2^2 \\ &= \quad -\lambda(1-\lambda)x_1^2 + 2\lambda(1-\lambda)x_1x_2 + (1-\lambda-1)(1-\lambda)x_2^2 \\ &= \quad -\lambda(1-\lambda)(x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2) \\ &= \quad \underbrace{-\lambda(1-\lambda)}_{<0}\underbrace{(x_1 - x_2)^2}_{>0} \;\le\; 0. \end{aligned}$$

Analog zeigt man $f(x) = -x^2$ ist konkav auf $\mathbb{R}$.

1.2.6 Konstruktionsprinzipien für Funktionen

Seien $f, g : D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}$ Intervall gegeben. Konstruiere dann die Funktionen

$$\begin{array}{llll} f+g: & (f+g)(x) & = f(x)+g(x) & x \in D \\ f-g: & (f-g)(x) & = f(x)-g(x) & x \in D \\ f \cdot g: & (f \cdot g)(x) & = f(x) \cdot g(x) & x \in D \\ \frac{f}{g}: & \left(\frac{f}{g}\right)(x) & = \frac{f(x)}{g(x)},\ g(x) \neq 0 & x \in D \end{array}$$

Weiteres Konstruktionsprinzip: **Verkettung von Funktionen**

Sei $g : A \to B, f \colon C \to D$ mit $B \subset C,\ A, B, C, D \subset \mathbb{R}$ Intervalle.
Dann wird durch $(f \circ g)(x) := f(g(x))$ eine Funktion $f \circ g \colon A \to D$ definiert.

$$x \xmapsto{g} g(x) \xmapsto{f} f(g(x)) = (f \circ g)(x)$$

Achtung: Die Verkettung ist nicht kommutativ! $f \circ g \neq g \circ f$.

Beispiel:

$$\begin{array}{lll} h(t) = b - ct & h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} & f \circ g \circ h = f(g(h(t))) \\ g(x) = \exp(x) & g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ & g(h(t)) = \exp(b - ct) \\ f(y) = \frac{a}{1+y} & f : (-1, \infty) \to \mathbb{R},\ a \in \mathbb{R} & f(g(h(t))) = \frac{a}{1+\exp(b-ct)} = L(t) \end{array}$$

$L(t)$ nennt man logistische Kurve. $L(t)$ beschreibt das Wachstum von Populationen über der Zeit t.

Weiteres Konstruktionsprinzip: **Umkehrfunktion**

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine im Intervall $[a, b]$ streng monoton wachsende Funktion (geht auch für streng monoton fallend).
Dann besteht der Wertebereich von f aus dem Intervall $[f(a), f(b)]$. Da f streng monoton wachsend, gibt es zu jedem y aus $[f(a), f(b)]$ genau ein $\bar{x} \in [a, b]$ mit $f(\bar{x}) = y$. Auf diese Weise wird eine Zuordnung $y \to \bar{x}$ gegeben, welche das Intervall $[f(a), f(b)]$ auf $[a, b]$ abbildet. Die so erklärte Zuordnung heißt Umkehrfunktion von f und wird mit f^{-1} bezeichnet.
$f^{-1} \colon [f(a), f(b)] \to [a, b]$ ist ebenfalls streng monoton wachsend.
Die Darstellungen $y = f(x)$ und $x = f^{-1}(y)$ sind gleichwertig.
Analog für $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ streng monoton fallend. (f^{-1} ist dann streng monoton fallend)

Beispiel: $f(x) = x^2 + 2, \quad 0 \leq x \leq 4$ streng monoton wachsend, Wertebereich: $[f(0), f(4)] = [2, 18]$

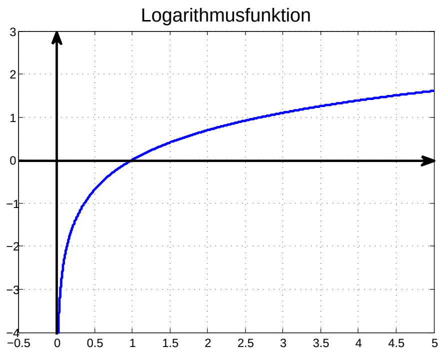
$$f^{-1} \colon [2, 18] \to [0, 4] \qquad y = f(x) = x^2 + 2 \ \Leftrightarrow\ y - 2 = x^2 \ \Rightarrow\ x = \pm\sqrt{y-2};$$

$$\text{Beachte: } 4 = \sqrt{18 - 2} \quad \Rightarrow x = \sqrt{y-2} = f^{-1}(y), \quad 2 \leq y \leq 18$$

Beispiel: **Der Logarithmus**

Betrachte $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \exp(x)$. Die Exponentialfunktion ist für $x \in \mathbb{R}$ streng monoton wachsend.
Wertebereich: $W = \{y \in \mathbb{R} |\ y = \exp(x)\} = (0, \infty)$
Also gibt es $\exp^{-1} \colon (0, \infty) \to \mathbb{R},\ y \mapsto \exp^{-1}(y) = \ln(y)$ (Logarithmus)
Aus $\exp(0) = 1,\ \exp(1) = e$ folgt $\ln(1) = 0,\ \ln(e) = 1$ $\ y \mapsto \ln(y)$ ist streng monoton wachsend, da ln die Umkehrfunktion einer streng mon. wachsenden Funktion ist.

$$
\begin{array}{lll}
\exp(x) \to \infty & \text{für} & x \to \infty \text{ liefert} \\
\ln(y) \to \infty & \text{für} & y \to \infty \\
\exp(x) \to 0 & \text{für} & x \to -\infty \text{ liefert} \\
\ln(y) \to -\infty & \text{für} & y \to 0
\end{array}
$$



Ferner gelten die Logarithmusgesetze:

$$
\begin{array}{ll}
\ln(u \cdot v) = \ln(u) + \ln(v) & u, v > 0 \\
\ln(u^\alpha) = \alpha \cdot \ln(u) & u > 0,\ \alpha \in \mathbb{Q} \\
\ln\left(\frac{u}{v}\right) = \ln(u) - \ln(v) & u, v > 0
\end{array}
$$

Mit Hilfe der zweiten Relation setzt man

$$u^\alpha \quad = \quad \exp(\alpha \ \ln(u)), \quad u > 0,\ \alpha \in \mathbb{R}$$

und kann zeigen, dass die Potenzgesetze gültig bleiben.

1.3 Folgen und Reihen

1.3.1 Folgen

Seien A,B Mengen und sei $a\colon A \to B$ eine Funktion, d.h. eine Vorschrift, welche jedem $x \in A$ genau ein $a(x) \in B$ zuordnet.
Im Fall $A = \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ nennt man eine Vorschrift $a\colon \mathbb{N} \to B$ eine Folge, und für $B = \mathbb{R}$ eine reelle Folge.

Schreibweise: $a(n) = n^2, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \quad (n \in \mathbb{N})$
Offensichtlich gilt: $a(1) = 1,\ a(2) = 2^2 = 4,\ a(2) = 9, \ldots$
Man schreibt kurz a_n statt $a(n)$ für die Folgenglieder und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für die gesamte Folge.

Beispiele:

i) $a_n = n^2, \quad n \in \mathbb{N} \quad a_1 = 1,\ a_2 = 4,\ a_3 = 9, \ldots$

ii) $a_n = \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N} \quad a_1 = 1,\ a_2 = \frac{1}{2},\ a_2 = \frac{1}{3}, \ldots$

iii) $a_n = (-1)^n, \quad n \in \mathbb{N} \quad a_1 = -1,\ a_2 = (-1)^2 = 1,\ a_3 = (-1)^3 = -1,\ a_4 = 1, \ldots$

Im Fall ii) werden die Werte immer kleiner und kleiner und scheinen schließlich gegen 0 zu gehen.

Definition (Konvergenzbegriff):

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat den Grenzwert $a \in \mathbb{R}$, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$|a_n - a| < \varepsilon \text{ für alle } n \geq N$$

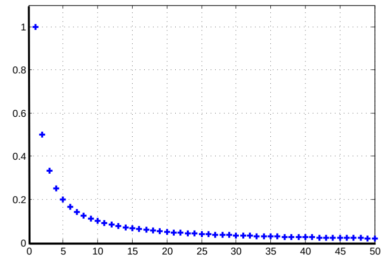
Dann schreibt man: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$

Beispiel: Sei $a_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ (vgl. ii) $\quad a = 0$

Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wähle dazu $N \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{N} < \varepsilon$

Dann gilt für $n \geq N$:
$|a_n - a| = |\frac{1}{n} - 0| = |\frac{1}{n}| \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$

Also gilt: $a_n \to 0$ bzw. $\frac{1}{n} \to 0$ für $n \to \infty$ bzw. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$



Hat eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keinen Grenzwert, so heißt sie divergent.

Konvergenzverhalten der Folge $a_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$:
Versuch: $a = 1$ als Grenzwert. Setze $\varepsilon = \frac{1}{2} \Rightarrow |a_n - 1| < \frac{1}{2}$ für n groß nicht möglich. Analog für $a = -1$.

$\Rightarrow (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = (-1)^n$ ist divergent.

Gibt es zu jedem $K > 0 [k > 0]$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $a_n > K$ $[a_n < -k]$ für $n \geq N$, so konvergiert die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen ∞ $[-\infty]$.

Schreibe: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$ bzw. $a_n \to \pm\infty$ $(n \to \infty)$

Beispiel: $a_n = n^2$, $n \in \mathbb{N}$.

Sei $K > 0$ vorgegeben. Wähle $N \in \mathbb{N}$ mit $N^2 > K$.
Dann gilt: $a_n = n^2 \geq N^2 > K$ für $n \geq N$ d.h. $a_n = n^2 \to \infty$ für $n \to \infty$

Einige Definitionen zu Folgen

- $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt nach oben [unten] beschränkt, falls es ein $K \in \mathbb{R}$ $[k \in \mathbb{R}]$ gibt mit

$$a_n \leq K, \;\; n \in \mathbb{N} \;\; [a_n \geq k, \;\; n \in \mathbb{N}].$$

  $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt beschränkt, falls die Folge nach oben und unten beschränkt ist.

- $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt monoton wachsend [bzw. fallend], falls folgendes gilt:

$$a_{n+1} \geq a_n \quad [a_{n+1} \leq a_n] \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

- Satz: Eine monoton wachsende [fallende] Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die nach oben [unten] beschränkt ist, ist konvergent, d.h. es gibt ein $a \in \mathbb{R}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$

Beispiel: $a_n = \frac{n}{n+1}$, $\quad n \in \mathbb{N}$
Es gilt: $a_n = \frac{n}{n+1} < 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$

$$a_{n+1} = \frac{n+1}{n+2} = \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} \cdot \frac{n}{n+1} = \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} \cdot a_n = \underbrace{\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}}_{>1} a_n > a_n$$

$\Rightarrow (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend und durch 1 nach oben beschränkt, also konvergent.

Eigenschaften konvergenter Folgen

Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen, d.h. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Ferner sei $c \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

- $\lim\limits_{n\to\infty} c \cdot a_n = c \cdot \lim\limits_{n\to\infty} a_n = c \cdot a$
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm b_n = a \pm b$
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = a \cdot b$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$, falls $b \neq 0$

Bemerkung: Hier ist $a = \infty$ oder $b = \infty$, aber nicht beide ∞ zugelassen.

Beispiel: $u_n = \frac{6n+1}{n^2+n}$, $n \in \mathbb{N}$

$$u_n = \frac{n^2 \cdot (\frac{6}{n} + \frac{1}{n^2})}{n^2 \cdot (1 + \frac{1}{n})} = \frac{\frac{6}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{a_n}{b_n}, \quad \text{d.h. } a_n = \frac{6}{n} + \frac{1}{n^2} \text{ und } b_n = 1 + \frac{1}{n}.$$

Es gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1$

Also folgt: $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$

Ökonomische Anwendung: Barwertbestimmung

Angenommen man kann y Euro zu 6% Zins jährlich investieren. Man erhält:

$$y_1 = y \cdot (1 + 0,06) \quad \text{nach einem Jahr,}$$
$$y_2 = y \cdot (1 + 0,06)^2 \quad \text{nach zwei Jahren,}$$
$$y_3 = y \cdot (1 + 0,06)^3 \quad \text{nach drei Jahren.}$$

Man kann die Rollen von y_3 und y auch vertauschen. Dann erhält man den Barwert (Gegenwartswert) y_G zu einer Summe von y Euro, welche man in 3 Jahren erhält.

$\Rightarrow$ $y = y_G \cdot (1 + 0,06)^3$

$\Leftrightarrow$ $y_G = \frac{y}{(1+0,06)^3} = 0,8396y$ Euro

Finde für n Jahre, Zinssatz r und Kapital y die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $a_n = \frac{y}{(1+r)^n}$ $n \in \mathbb{N}$ für den Barwert.

Stetige Verzinsung

Wird ein Kapital von 100 Euro zu einem Zinssatz von 6% jährlich verzinst, so erhält man nach einem Jahr: $100 \cdot (1+0,06) = 106$ Euro. Bei monatlicher Verzinsung mit jeweils 6%: $100 \cdot (1+\frac{0,06}{12})^{12} = 106.17$ Euro.

Allgemein: finden wir für ein Kapital y mit einer Zinsrate r bei n Verzinsungsschritten pro Jahr am Ende die Summe: $y_n = y \cdot (1 + \frac{r}{n})^n$ $n \in \mathbb{N}$

Dieser Prozess wird durch die Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $y_n = y(1 + \frac{r}{n})^n$ beschrieben. Stetige Verzinsung heißt sofortige Verzinsung, d.h. das Verhalten von $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für $n \to \infty$.

Frage: Kapital bei stetiger Verzinsung nach 1 Jahr?

Setze nun $r = 1$ und $y = 1$. Man erhält die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ $n \in \mathbb{N}$

Man findet: $a_1 = 2$, $a_2 = (\frac{3}{2})^2 = 2.25$, $a_3 = (\frac{4}{3})^3 = 2.3703\ldots$

Man kann zeigen: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist streng monoton wachsend und nach oben beschränkt, somit also konvergent. Also existiert ein $a \in \mathbb{R}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = a$

Was ist a?

Eine genaue Analyse liefert $a = e = \exp(1) = 2,7188\ldots$

Klärung des allgemeinen Falls: Setze hierzu $s = \frac{n}{r}$, damit folgt

$$n = sr \text{ und } \left(1+\frac{r}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{s}\right)^{sr} = \left(\left(1+\frac{1}{s}\right)^s\right)^r$$

Man findet also

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{r}{n}\right)^n = \lim_{s\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{s}\right)^s\right)^r = \left(\underbrace{\lim_{s\to\infty}\left(1+\frac{1}{s}\right)^s}_{\exp(1)}\right)^r = \exp(1)^r = \exp(r)$$

Also erhält man bei stetiger Verzinsung mit Zinssatz r und Eigenkapital y nach einem Jahr die Summe $y(1) = y\cdot\exp(r)$

Nach t-Jahren erhält man $y(t) = y\cdot\exp(rt),\ t\geq 0$

Beispiel: $y = 100$ Euro $r = 0.06$

$$y^\infty = \lim_{n\to\infty} 100\cdot\left(1+\frac{0.06}{n}\right)^n = 100\exp(0.06) = 106.186 \text{ Euro}$$

Umgekehrt erhält man als Barwert y_G eine Zahlung von y Euro in t Jahren bei stetiger Verzinsung.

$$y_G\exp(rt) = y \quad\Rightarrow\quad y_G = y\exp(-rt),\quad t\geq 0 \quad \text{"stetige Abzinsung"}$$

1.3.2 Reihen

Eine Reihe ist eine spezielle Form einer Folge.

Definition:

Sei $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge. Mit dieser Folge definieren wir eine neue Folge, nämlich

$$(s_n)_{n\in\mathbb{N}},\ s_n := \sum_{i=1}^n a_i = a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n \quad (n\in\mathbb{N})$$

s_n heißt n-te Partialsumme von einer Folge $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Partialsummen heißt Reihe und wird $\sum_{i=1}^\infty a_i$ bezeichnet.

Beispiel: $a_i = \frac{1}{i(i+1)},\ a_1 = \frac{1}{2},\ a_2 = \frac{1}{6},\ a_3 = \frac{1}{12}$

Dann ist $s_n = \sum\limits_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)}$,

$$s_1 = a_1 = \tfrac{1}{2}$$
$$s_2 = a_1 + a_2 = \tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{6} = \tfrac{2}{3}$$
$$s_3 = s_2 + a_3 = \tfrac{2}{3}+\tfrac{1}{12} = \tfrac{3}{4}$$

Es lässt sich zeigen

$$s_n = \frac{n}{n+1} \qquad \text{für } n\in\mathbb{N},$$

und somit folgt $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 1 = \sum\limits_{i=1}^\infty \frac{1}{i(i+1)}$.

Definition:

Eine Reihe $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ heißt konvergent, falls die Folge der Partialsummen konvergiert, d.h.

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i \text{ konvergiert} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} s_n \text{ existiert.}$$

In diesem Fall schreibt man $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i := \lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n}$.

Beispiel:

a) geometrische Reihe: $s_n = \sum_{i=1}^{n} \rho^{i-1}, \quad \rho \in \mathbb{R}$ fest

b) harmonische Reihe: $s_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$

Konvergenzverhalten dieser Reihen:

a) $s_n = \sum_{i=1}^{n} \rho^{i-1} = 1 + \rho + \rho^2 + \ldots + \rho^{n-1}$

Es gilt: $s_n - \rho s_n = 1 + \rho + \rho^2 + \ldots + \rho^{n-1} - (\rho + \rho^2 + \ldots + \rho^n) = 1 - \rho^n$

Also folgt: $s_n(1-\rho) = 1 - \rho^n \quad \Rightarrow \quad s_n = \frac{1-\rho^n}{1-\rho} \quad (n \in \mathbb{N})$

Für $|\rho| < 1$ gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} \rho^n = 0$

Daraus folgt: $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \rho^{i-1} = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \rho^{i-1} = \frac{1}{1-\rho}$

Für $|\rho| \geq 1$ ist die geometrische Reihe divergent.

b) Für die harmonische Reihe mit $n = 2^m$ gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = \sum_{i=1}^{2^m} \frac{1}{i} = \underbrace{1}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{2}}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{\geq 2\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{\geq 4\cdot\frac{1}{8} = \frac{1}{2}} + \ldots + \underbrace{\frac{1}{2^{m-1}+1} + \ldots + \frac{1}{2^m}}_{\geq 2^{m-1}\cdot\frac{1}{2^m} = \frac{1}{2}} \geq (m+1)\frac{1}{2} \qquad (*)$$

Für $n \to \infty$ folgt erstmal $m \to \infty$

Damit folgt: $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = \lim\limits_{m\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{2^m} \frac{1}{i} \overset{*}{\geq} \lim\limits_{m\to\infty} (m+1)\cdot\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$ divergiert für $n \to \infty$.

Ökonomische Anwendung der geometrischen Reihe:

Zahlt eine Person y Euro ein, welche mit der Zinsrate r jährlich verzinst wird, so erhält man, dass $y_i = y(1+r)^i$ (i in Jahren)

Umgekehrt erhalten wir als Gegenwartswert (Barwert) den Betrag: $y_G = \frac{y}{(1+r)^i}$

Eine Privatperson leiht sich nun einen Kredit bei einer Bank und muss diesen in der Zukunft zurückzahlen. Zahlt die Person n Jahre lang den Betrag y zurück, so ist der Barwert G_n dieser Zahlungen gegeben durch:

$$G_n := \sum_{i=1}^{n} y_G = \sum_{i=1}^{n} \frac{y}{(1+r)^i} = y \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\left(\frac{1}{1+r}\right)^i}_{=\left(\frac{1}{1+r}\right)^{i-1}\left(\frac{1}{1+r}\right)} = \frac{y}{1+r} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{1+r}\right)^{i-1}$$

Müsste man diese Zahlungen bis in alle Zeiten leisten (z.B. Rentenzahlungen), so erhält man für den Barwert:

$$G_\infty := \lim_{n\to\infty} G_n = \frac{y}{1+r} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+r}\right)^{i-1} = \frac{y}{1+r} \frac{1}{1-\frac{1}{1+r}} = \frac{y}{1+r} \frac{1}{\frac{1+r-1}{r+1}} = \frac{y}{r}.$$

Kapitel 2

Differentialrechnung mit einer Variablen

2.1 Stetige Funktionen

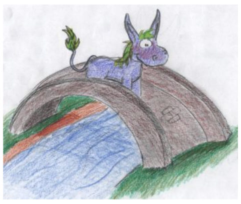
2.1.1 Stetigkeit in $\mathbb{R}$

Sei $f : D = (a, b) \to \mathbb{R}$ eine reellwertige Funktion und sei $c \in \mathbb{R}$.
f heißt stetig in $c \in D$, falls für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(c)$$

Ist f stetig in jedem Punkt $c \in D$, so heißt f stetig auf D.

Merkregel: Eine Funktion f ist in einem Intervall stetig, wenn sich sich ohne Stiftabsetzen zeichenen lässt.



Beispiel:

- $f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ -x & \text{für } x < 0 \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}$

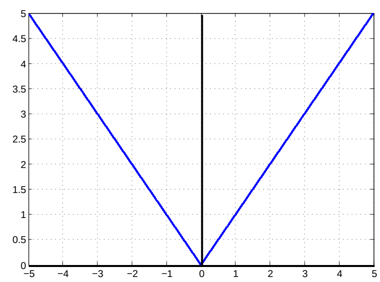
  ist stetig für alle $x \in \mathbb{R}$

  z.z.: Für alle $c \in \mathbb{R}$ ist f stetig.

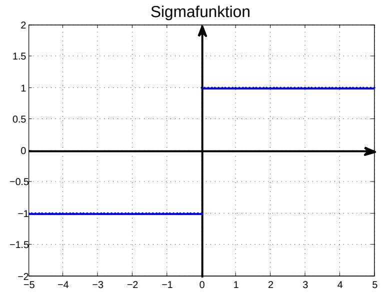
  Beweis: Sei $c \in \mathbb{R}$ beliebig und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bel. Folge in $\mathbb{R}$, mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$. Dann gilt:

  $$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} |x_n| = |c| = f(c)$$

  $\Rightarrow$ d.h. f ist auf ganz $\mathbb{R}$ stetig.



- $f(x) = sign(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \geq 0 \\ -1 & \text{für } x < 0 \end{cases}$
  "Sigma-Funktion"
  f ist an der Stelle $c = 0$ nicht stetig

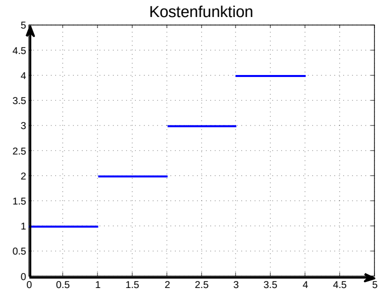


Beispiel: Smartphone Telefongebühr 20ct/min, Abrechnung im Minutentakt

Kostenfunktion:

$$K(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq 0 \\ 0.2i & \text{für } t \in (i-1, i],\ i = 1, 2, 3 \dots \end{cases}$$

K(t) ist an den Stellen $t = i,\ i = 1, 2, 3, \dots$ unstetig



2.1.2 Grenzwerte von Funktionen

Definition:

Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, sei $d \in \mathbb{R}$. Wir sagen f konvergiert gegen d für $x \to a[b]$, d.h. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = d$ $[\lim\limits_{x \to b} f(x) = d]$, falls für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a[b]$ gilt: $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = d$.

Bemerkung: In dieser Definition sind die Werte $a = -\infty,\ b = \infty,\ d = \pm\infty$ ausdrücklich zugelassen.

Beispiel: Grenzwerte rationaler Funktionen

Seien p,q Polynome, d.h. $p(x) = \sum\limits_{j=0}^{m} a_j x^j,\ a_m \neq 0,\ q(x) = \sum\limits_{j=0}^{n} b_j x^j,\ b_n \neq 0$

Grad(p)=m, Grad(q)=n

Sei jetzt $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ für $x \in \mathbb{R}$ mit $q(x) \neq 0$
Verhalten von f(x) für $x \to \infty$:

$$f(x) = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n} = \frac{x^{m-n}\left(\frac{a_0}{x^m} + \frac{a_1}{x^{m-1}} + \ldots + \frac{a_{m-1}}{x} + a_m\right)}{\frac{b_0}{x^n} + \frac{b_1}{x^{n-1}} + \ldots + \frac{b_{n-1}}{x} + b_n} \to \begin{cases} \infty, & \text{falls } m > n \text{ und } \frac{a_m}{b_n} > 0 \\ -\infty, & \text{falls } m > n \text{ und } \frac{a_m}{b_n} < 0 \\ \frac{a_m}{b_n}, & \text{falls } m = n \\ 0, & \text{falls } m < n \end{cases}$$

2.1.3 Stetigkeit bei Verknüpfungen von Funktionen

a) Sind $f_1, f_2 : D \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen, so sind auch

$$f_1 + f_2 : D \to \mathbb{R} \quad (f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x) \quad \text{und}$$
$$f_1 \cdot f_2 : D \to \mathbb{R} \quad (f_1 \cdot f_2)(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$$

stetig.

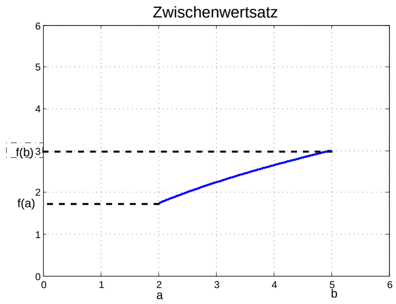
b) Sind $f_1 : D \to E$ und $f_2 : F \to G$ stetig und $E \subset F$, so ist auch die Hintereinanderschaltung

$$f_2 \circ f_1 : (f_2 \circ f_1)(x) = f_2(f_1(x)) \quad D \to G$$

stetig.

Zwischenwertsatz

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig.
Dann nimmt f jeden Wert im Intervall
$[\min(f(a), f(b)),\ \max(f(a), f(b))]$ an.
Insbesondere folgt daraus die Existenz einer
Nullstelle von f, falls $f(a) \cdot f(b) < 0$



Beispiel: Es sei $d(p)$ die Nachfragefunktion einer Ware in Abhängigkeit des Preises p

und s(p) die Lieferfunktion. Typischerweise gilt:

$d(p) \geq 0$ und $d(p)$ mon. fallend in p & $s(0) = 0$ und $s(p)$ mon. steigend in p

z.B.: $d(p) = max(100 - 2p, 0),\ s(p) = \exp(0.1p) - 1$ $(d, s$ sind stetig).

Hierbei ist $max(x, 0) = \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0, \\ 0 & \text{für } x < 0, \end{cases}$ $x \in \mathbb{R}$ die Maximumsfunktion.

Der sich einstellende Marktpreis p^M erfüllt $d(p^M) = s(p^M)$. Setze $z(p) = d(p) - s(p) \stackrel{!}{=} 0$

Es gilt: $p = 0,\ z(0) = d(0) - s(0) = 100 - \exp(0) + 1 = 100 > 0$

$p = 50,\ z(50) = d(50) - s(50) = max(100 - 2 \cdot 50, 0) - \exp(5) + 1 = 1 - \exp(5) < 0$

ZWS: Die Funktion z hat im Intervall (0,50) eine Nullstelle p^M, d.h.

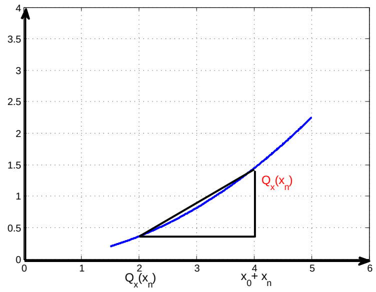
$z(p^M) = 100 - 2p^M - \exp(p^M) - 1 = 0.$ p^M ist der gesuchte Marktpreis.

2.2 Differenzierbare Funktionen

Setze $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ eine Funktion und sei $x_0 \in (a,b)$.

$$Q_{x_0}(\triangle x) = \frac{f(x_0 + \triangle x) - f(x_0)}{\triangle x}, \quad \triangle x \neq 0$$

"durchschnittliche Steigungsrate" von f in $(x_0, x_0 + \triangle x)$



2.2.1 Differenzierbarkeit in $\mathbb{R}$

$f : (a,b) \to \mathbb{R}$ heißt differenzierbar bei x_0, falls der Grenzwert $\lim\limits_{\triangle x \to 0} Q_{x_0}(\triangle x)$ existiert.

Wir bezeichnen ihn mit $f'(x_0)$ d.h.

$$f'(x_0) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x_0 + \triangle x) - f(x_0)}{\triangle x}$$

(falls nicht, so ist f bei x_0 nicht differenzierbar.)

Alternativ schreibt man auch $f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0)$

f heißt differenzierbar auf (a,b), falls f für jedes $x_0 \in (a,b)$ differenzierbar ist.
In diesem Fall ist $f' : (a,b) \to \mathbb{R}$ die Ableitungsfunktion.

Berechnung der Ableitung mittels Differenzenquotient:

- $f(x) = x^2$

  $$\frac{f(x_0 + \triangle x) - f(x_0)}{\triangle x} = \frac{(x_0 + \triangle x)^2 - x_0^2}{\triangle x} = \frac{x_0^2 + 2x_0 \triangle x + \triangle x^2 - x_0^2}{\triangle x} = \frac{\triangle x(2x_0 + \triangle x)}{\triangle x} \to 2x_0 \text{ für } \triangle x \to 0$$

  $f(x) = x^2$ ist an jeder Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f'(x_0) = 2x_0$

- $f(x) = c$ (konstante Funktion)

  $$\frac{f(x_0 + \triangle x) - f(x_0)}{\triangle x} = \frac{c - c}{\triangle x} = 0 \quad \Rightarrow \ f'(x_0) = 0 \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$$

- $f(x) = x^n, \quad n \in \mathbb{N}$

  $$\frac{f(x_0 + \triangle x) - f(x_0)}{\triangle x} = \frac{(x_0 + \triangle x)^n - x_0^n}{\triangle x} = \frac{x_0^n + nx_0^{n-1} \triangle x + \ldots + nx_0 \triangle x^{n-1} + \triangle^n - x_0^n}{\triangle x} = nx_0^{n-1} + \text{Rest}(\triangle x)$$

  mit $\text{Rest}(\triangle x) \to 0$ für $\triangle x \to 0 \Rightarrow \lim\limits_{\triangle x \to 0} \frac{(x_0 - \triangle x)^n - x_0^n}{\triangle x} = nx_0^{n-1}$ für $x_0 \in \mathbb{R}$ beliebig.

  Also ist $f(x) = x^n$ an jeder Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$ differenzierbar mit
  $f'(x_0) = nx_0^{n-1}$ d.h. $f'(x) = nx^{n-1}$

Man beachte, dass für die Herleitung der Ableitung von $f(x) = x^n$ die ”Binomische Formel”

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

benutzt wurde. Dabei nennt man

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

einen Binomialkoeffizient und $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$ die Fakultät von n. Ferner definiert man $0! = 1$.

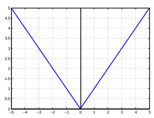
2.2.2 Zusammenhang zwischen Stetigkeit und Differenzierbarkeit

Satz: Ist $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ bei $x_0 \in (a,b)$ differenzierbar, so ist f dort auch stetig.

Bemerkung: Die Umkehrung des Satzes gilt nicht.

Betrachte z.B. $f(x) = |x|$ an der Stelle $x_0 = 0$. Wir haben schon gezeigt, dass f in $x_0 = 0$ stetig ist.
Aber: $f(x) = |x|$ ist bei $x_0 = 0$ nicht differenzierbar, denn

$$Q_{x_0}(\triangle x) = \frac{f(x_0 + \triangle x) - f(x_0)}{\triangle x} = \frac{f(\triangle x) - f(0)}{\triangle x} = \frac{|\triangle x| - 0}{\triangle x} = \frac{|\triangle x|}{\triangle x}$$



konvergiert nicht für $\triangle x \to 0$, denn $|\triangle x| = \begin{cases} \triangle x & (\triangle x \geq 0) \\ -\triangle x & (\triangle x < 0). \end{cases}$

2.2.3 Grundlegende Differentiationsregeln

Seien $f_1, f_2 \colon (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar.

i) Dann ist auch $f(x) = \alpha f_1(x) + \beta f_2(x),\ x \in (a,b)$ differenzierbar und $f'(x) = \alpha f_1'(x) + \beta f_2'(x),\ x \in (a,b)$ **”Summenregel”**

   Beispiel: $f(x) = 3x^2 + 7x^4, \qquad f'(x) = 6x + 28x^3$

ii) Sei $f(x) = f_1(x) \cdot f_2(x),\ x \in (a,b)$. Dann ist f diff. und $f'(x) = f_1'(x) \cdot f_2(x) + f_1(x) \cdot f_2'(x),\ x \in (a,b)$ **”Produktregel”**

   Beispiel: $f(x) = (x^2+2)(x^3-8x), \qquad f'(x) = (2x)(x^3-8x) + (x^2+2)(3x^2-8)$

iii) Sei $f(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)},\ x \in (a,b),\ f_2(x) \neq 0$. Dann ist $f(x)$ diff. mit $f'(x) = \frac{f_1'(x) \cdot f_2(x) - f_1(x) \cdot f_2'(x)}{(f_2(x))^2}$ **”Quotientenregel”**

   Beispiel 1: $f(x) = \frac{3x-2}{x^2+1}, \qquad f'(x) = \frac{3 \cdot (x^2+1) - (3x-2)(2x)}{(x^2+1)^2}$

   Beispiel 2: Zu einer beliebigen Funktion h (z.B. Kostenfunktion) heißt $a(x) = \frac{h(x)}{x},\ x > 0$ die Durchschnittsfunktion. Ist h differenzierbar, so ist auch a differenzierbar und mit der Quotientenregel erhält man

$$a'(x) = \frac{h'(x) \cdot x - h(x) \cdot 1}{x^2} = \frac{h'(x)}{x} - \frac{1}{x}\frac{h(x)}{x} = \frac{1}{x}(h'(x) - a(x))$$

   Somit folgt: $a'(x) \begin{pmatrix} < \\ = \\ > \end{pmatrix} 0$ genau dann, wenn $h'(x) \begin{pmatrix} < \\ = \\ > \end{pmatrix} a(x)$.

iv) Sei $f_1 : C \to D,\ f_2 : A \to B$ mit $B \subset C,\ f_1, f_2$ differenzierbar, so ist $f(x) = (f_1 \circ f_2) = f_1(f_2(x)),\ f : A \to D$

Es gilt: $f(x) = (f_1 \circ f_2)(x)$ ist differenzierbar mit
$f'(x) = (f_1(f_2(x)))' = f_1'(f_2(x)) \cdot f_2'(x),\ x \in A$ **"Kettenregel"**

Beispiel: $f(x) = (2x^2 + 7x - 1)^{30}$ $\qquad f'(x) = 30(2x^2 + 7x - 1)^{29}(4x + 7)$

v) **Regel für Umkehrfunktionen**

Sei $f : A \to B$ eine differenzierbare, umkehrbare Funktion mit $f'(x) \neq 0,\ x \in A$. Dann ist die Umkehrfunktion $f^{-1} : B \to A$ differenzierbar.

Bestimmen der Ableitung: Differenziere die Gleichung $x = f(f^{-1}(x)),\ x \in B$ mit der Kettenregel und finde

$$1 = f'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1}(x))'.$$

Dies liefert

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \quad \textbf{"Umkehrregel"}$$

Beispiel: $f(x) = x^2,\ f : A \to B,\ A = (0, \infty),\ B = (0, \infty)$

f ist streng monoton, d.h. umkehrbar mit $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$

$$f(x) = x^2, \quad f'(x) = 2x, \quad f^{-1}(x) = \sqrt{x},$$

$$(f^{-1})'(x) = (\sqrt{x})' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{2(f^{-1}(x))} = \frac{1}{2\sqrt{x}},\ x > 0$$

Allgemein finden wir: $f(x) = x^n, \quad f'(x) = nx^{n-1} \quad f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$

$$(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}} = \frac{1}{nx^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{n}x^{\frac{-(n-1)}{n}} = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}, \quad n \in \mathbb{N},\ x > 0$$

2.2.4 Trigonometrische Funktionen

$f(x) = \sin(x)$ ist für $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar und $f'(x) = \cos(x),\ x \in \mathbb{R}$.

Aus $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ folgt:

$$\begin{aligned} 2\sin(x)\underbrace{\sin'(x)}_{=\cos(x)} + 2\cos(x)\cos'(x) &= 0 \\ 2\cos(x)(\sin(x) + \cos'(x)) &= 0,\ x \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow \qquad \cos'(x) &= -\sin(x),\ x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Die Exponentialfunktion $f(x) = \exp(x),\ x \in \mathbb{R}$ ist differenzierbar mit: $f'(x) = \exp(x) = f(x),\ x \in \mathbb{R}$.

Mit der Umkehrregel finden wir $f(x) = \exp(x),\ f : \mathbb{R} \to (0, \infty) \quad \ln(x),\ f^{-1} : (0, \infty) \to \mathbb{R}$

$$\ln'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\exp(\ln(x))} = \frac{1}{x},\ x > 0.$$

Beispiel: $f(x) = \ln(1 + x^2) \quad f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \cdot 2x = \frac{2x}{1+x^2},\ x \in \mathbb{R}$

Liste elementarer differenzierbarer Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$

$f(x)$	x^n	x^{-n}	$\exp(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\ln(x)$	$x^\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}$
$f'(x)$	nx^{n-1}	$-nx^{-n-1}$	$\exp(x)$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\frac{1}{x}$	$\alpha x^{\alpha-1}$
D	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}\backslash\{0\}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$(0, \infty)$	$(0, \infty)$

2.2.5 Ergänzung zur Definition der Stetigkeit

Satz:

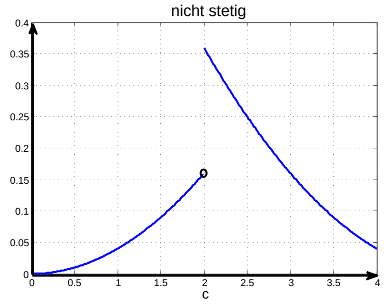
Die Stetigkeit von f in c gilt genau dann, wenn für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}},\ x_n < c,\ \lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$

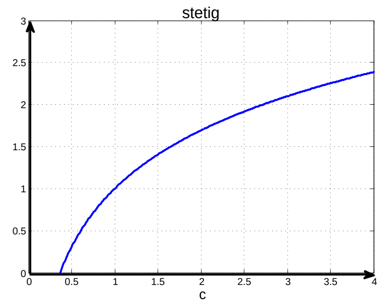
$$\text{der linksseitige Grenzwert} \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f_l$$

und für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}},\ x_n > c,\ \lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$

$$\text{der rechtsseitige Grenzwert} \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f_r$$

existieren und übereinstimmen, d.h. $f_l = f_r$.





Beispiel: $f(x) = |x| = \begin{cases} x, & \text{für } x \geq 0 \\ -x & \text{für } x < 0 \end{cases}$, Stelle c=0

linksseitiger Grenzwert: $x_n < 0,\ \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0, \qquad \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} -x_n = 0\ (= f_l)$

rechtsseitiger Grenzwert: $x_n > 0,\ \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0, \qquad \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0\ (= f_r)$

$\Rightarrow\ f_l = f_r \quad \Rightarrow \quad f(x) = |x|$ ist stetig in 0

Ergänzung zur Definition der Differenzierbarkeit:

Wiederholung: Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$. f heißt differenzierbar bei $c \in (a, b)$, falls

$$\lim_{\triangle x\to 0} Q_c(\triangle x) = \frac{f(c + \triangle x) - f(c)}{\triangle x} = f'(c)$$

existiert.

Satz:

f ist in c genau dann differenzierbar, falls f in c stetig ist und der

$$\text{linksseitige Differenzenquotient} \quad \lim_{\substack{\triangle x\nearrow 0\\ \triangle x<0}} \frac{f(c + \triangle x) - f(c)}{\triangle x} = d_l \quad \text{und}$$

$$\text{der rechtsseitige Differenzenquotient} \quad \lim_{\substack{\triangle x\searrow 0\\ \triangle x>0}} \frac{f(c + \triangle x) - f(c)}{\triangle x} = d_r$$

existieren und übereinstimmen, d.h. $d_l = d_r = f'(c)$. Dabei benutzen wir die Schreibweise

Grenzwert von oben: $\triangle x \searrow 0$,

Grenzwert von unten: $\triangle x \nearrow 0$

Beispiel: $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{für } x < 0 \end{cases}, \ c = 0.$

Stetigkeit von f bei $c = 0$

linksseitiger Grenzwert: $x_n < 0, \ \lim_{n\to\infty} x_n = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} f(x) = \lim_{n\to\infty} -x_n^2 = 0 (= f_l)$

rechtsseitiger Grenzwert: $x_n > 0, \ \lim_{n\to\infty} x_n = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_n^2 = 0 (= f_r)$

$\Rightarrow \quad f_r = f_l \quad \Rightarrow$ f ist stetig in 0 und $f(0) = 0$.

Differenzierbarkeit von f bei $c = 0$

linksseitiger Differenzenquotient: $\frac{-(\triangle x)^2 - 0}{\triangle x} = - \triangle x \to 0 \ (= d_l)$ für $\triangle x \to 0$

rechtsseitiger Differenzenquotient: $\frac{(\triangle x)^2 - 0}{\triangle x} = \triangle x \to 0 \ (= d_r)$ für $\triangle x \to 0$

Es gilt $d_l = d_r = 0 \Rightarrow$ f ist in 0 differenzierbar und $f'(0) = 0$.

Alternative zur Betrachtung des Differenzenquotienten: Betrachte $f'(x), x \neq 0$. Es gilt $f'(x) = \begin{cases} 2x, & x > 0 \\ -2x & x < 0 \end{cases}$

Analysiere jetzt bei $c = 0$ den rechts- und linksseitigen Grenzwert der Ableitung.

2.3 Qualitative Analyse von Funktionen

2.3.1 Zusammenhang zwischen Monotonie und Ableitung

Satz: Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann gilt:

i) $f'(x) > 0$ in $(a, b) \quad \Rightarrow \quad$ f ist streng monoton wachsend auf (a, b)

ii) $f'(x) \geq 0$ in $(a, b) \quad \Leftrightarrow \quad$ f ist monoton wachsend auf (a, b)

iii) $f'(x) < 0$ in $(a, b) \quad \Rightarrow \quad$ f ist streng monoton fallend auf (a, b)

iv) $f'(x) \leq 0$ in $(a, b) \quad \Leftrightarrow \quad$ f ist monoton fallend auf (a, b)

Bemerkung: Der Graph einer differenzierbaren Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ hat an einer Stelle $c \in (a, b)$

eine $\left\{ \begin{array}{c} \text{steigende} \\ \text{waagrechte} \\ \text{fallende} \end{array} \right\}$ Tangente genau dann, wenn $f'(c) \left\{ \begin{array}{c} > \\ = \\ < \end{array} \right\}$ 0 ist.

2.3.2 Höhere Ableitungen

Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar, d.h. für jedes x aus (a, b) existiert die Ableitung $f'(x)$.
Somit erhält man $f' : (a, b) \to \mathbb{R}, \ f'$ kann selbst wieder differenzierbar sein.
In diesem Fall bezeichnet man ihre Ableitung $(f')'$ mit $f'' = \frac{d^2 f}{dx^2}$.
Man sagt, f ist zweimal differenzierbar auf (a, b).
Ferner gilt: $f'' : (a, b) \to \mathbb{R}$

Beispiel: $f(x) = \exp(1-2x), \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar, $\qquad f'(x) = \exp(1-2x)(-2), \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wieder differenzierbar

$$f''(x) = \exp(1 - 2x)(-2)^2 = 4 \exp(1 - 2x), \ f'' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

Allgemein gilt: Ist die k-te Ableitung von f, $k = 1, 2, \ldots$ selbst wieder differenzierbar, so bezeichnen wir ihre Ableitung als $(k+1)$-te Ableitung von f.

Schreibweise: $f^{(k)}(x) = \frac{d^k f(x)}{dx^k}$, $f^{(k)} : (a,b) \to \mathbb{R}$ "k-te Ableitung von f"

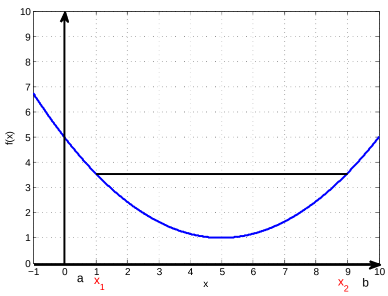
2.3.3 2-te Ableitung und Krümmung

Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar.

Gilt $f''(x) \geq 0$ in (a,b), so ist $f'(x)$ monoton wachsend und f sieht qualitativ wie folgt aus:
Wählt man $x_1, x_2 \in (a,b)$, so folgt:
$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$,

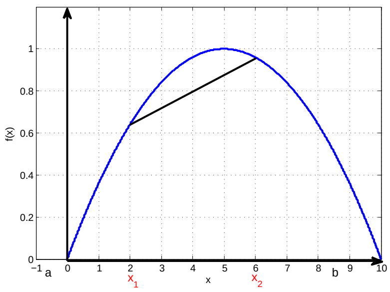
$0 \leq \lambda \leq 1$

$\Rightarrow$ f ist konvex
Prototyp: $f(x) = x^2$, $f''(x) = 2 > 0$



Gilt $f''(x) \leq 0$ in (a,b), so ist $f'(x)$ monoton fallend und f sieht qualitativ wie folgt aus. Wir erhalten:
$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$,

$0 \leq \lambda \leq 1$
$\Rightarrow$ f ist konkav
Prototyp: $f(x) = -x^2 \quad \Rightarrow f''(x) = -2 < 0$



Satz: Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. Dann gilt:

$$\begin{array}{lll} f''(x) > 0, \quad x \in (a,b) & \Rightarrow & \text{f strikt konvex auf } (a,b) \\ f''(x) \geq 0, \quad x \in (a,b) & \Leftrightarrow & \text{f konvex auf } (a,b) \\ f''(x) < 0, \quad x \in (a,b) & \Rightarrow & \text{f strikt konkav auf } (a,b) \\ f''(x) \leq 0, \quad x \in (a,b) & \Leftrightarrow & \text{f konkav auf } (a,b) \end{array}$$

Beispiele:

i) $f(x) = x^2$ ist konvex auf $\mathbb{R}$, da $f''(x) = 2 > 0$, $x \in \mathbb{R}$.

ii) $f(x) = x^3 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 3x^2,\ f''(x) = 6x \left\{ \begin{array}{c} > \\ = \\ < \end{array} \right\} 0 \text{ für } x \left\{ \begin{array}{c} > \\ = \\ < \end{array} \right\} 0.$

$\Rightarrow$ f ist konvex für $x \in [0, \infty)$ und konkav auf $(-\infty, 0]$

Wie $f(x) = x^3$ sind viele Funktionen aus konvexen und konkaven Teilbereichen zusammengesetzt. Jede Nullstelle $\bar{x}$ von $f''(x) = 0$ mit Vorzeichenwechsel heißt Wendepunkt. Einen Wendepunkt mit waagerechter Tangente heißt Sattelpunkt.
An einem Wendepunkt $\bar{x}$ gilt also: $f''(\bar{x}) = 0$
An einem Sattelpunkt $\bar{x}$ gilt also: $f'(\bar{x}) = 0$ und $f''(\bar{x}) = 0$
$f(x) = x^3$ besitzt einen Sattelpunkt bei $\bar{x} = 0$, denn $f'(0) = f''(0) = 0$ und $f''(x)$ wechselt das Vorzeichen bei $\bar{x} = 0$

2.3.4 Extremwerte von Funktionen

Definition: $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ besitzt ein relatives Maximum [Minimum] bei $x_0 \in [a, b]$, wenn für alle x aus einer ϵ-Umgebung von x_0, $x \neq x_0$, $x \in [a, b]$ gilt

$$f(x) < f(x_0) \quad [f(x) > f(x_0)], \quad x \in U_\epsilon(x_0),\ x \neq x_0, x \in [a, b].$$

Relative Extrema, d.h. relative Maxima oder relative Minima können auftreten
- am Rand $\{a, b\}$ des Definitionsbereiches $[a, b]$
- im Inneren (a, b) des Definitionsbereiches $[a, b]$.

Ist nun f differenzierbar, so können wir relative Extrema im Inneren über eine waagrechte Tangente charakterisieren.

Satz: Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Hat f in $x_0 \in (a, b)$ ein relatives Extremum, so ist $f'(x_0) = 0$.

Zur Bestimmung einer hinreichenden Bedingung für ein relatives Maximum [Minimum] x_0 benötigen wir, dass die Funktion f lokal bei x_0 echt konkav, d.h. $f''(x_0) < 0$ [echt konvex, d.h. $f''(x_0) > 0$] sein muss.

Satz: Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. Ist $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$ $[f''(x_0) > 0]$ für ein $x_0 \in (a, b)$, so hat f ein lokales Maximum [Minimum] an der Stelle x_0.

2.4 Lokale Approximation von Funktionen

Idee: Versuche beliebige Funktionen lokal durch "Polynome" darzustellen.

2.4.1 Potenzreihen

Sei $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ eine Folge.

$$\text{Eine Reihe} \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

heißt Potenzreihe in x mit den Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, \ldots$

Beispiel: Geometrische Reihe: $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$, d.h $a_k = 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$

Eigenschaften von Potenzreihen

Zu jeder Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ gibt es eine Zahl $\rho \geq 0$ mit der Eigenschaft, dass diese Reihe für $|x| < \rho$ konvergiert und für $|x| > \rho$ divergiert. ρ heißt Konvergenzradius der Potenzreihe.

Bsp.: Für die geometrische Reihe gilt $\rho = 1$ und $\sum\limits_{j=1}^{\infty} x^{j-1} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ für $|x| < 1$

Innerhalb des Konvergenzradius dürfen Potenzreihen gleicherweise differenziert werden, d.h.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots \\ f'(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k k x^{k-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots \qquad \text{für } |x| < \rho. \end{aligned}$$

2.4.2 Lokale Approximation einer Funktion f an der Stelle 0

Idee: Konstruiere eine Potenzreihe, so dass bei 0 der Funktionswert und möglichst viele Ableitungen übereinstimmen. Sei $f(x)$ beliebig oft differenzierbar, und sei $p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$
Fordere $f(0) = p(0) = a_0 \quad \Rightarrow \quad a_0 = f(0)$

$$p'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k k x^{k-1}$$

Fordere $f'(0) = p'(0) = a_1 \cdot 1 \quad \Rightarrow \quad a_1 = f'(0)$

$$p''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} a_k \cdot k \cdot (k-1) \cdot x^{k-2}$$

Fordere $f''(0) = p''(0) = a_2 \cdot 2 \cdot 1 \quad \Rightarrow \quad a_2 = \frac{f''(0)}{2}$

Man findest sukzessive $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}, \quad k \in \mathbb{N}$
Beachte: $0! = 1,\ 1! = 1,\ 2! = 2,\ k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k$

Vorstellung: Je mehr Ableitungen zwischen p und f bei 0 übereinstimmen, desto besser ist die Approximation von f durch p in der Nähe von 0.

Man erhält:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots$$

An einer beliebigen Stelle $x_0 \neq 0$ findet man

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \ldots$$

In dieser Situation ergeben sich jetzt zwei Möglichkeiten

i) Setze die Reihe bis unendlich fort.
Dann gilt: Ist f bei x_0 durch eine Potenzreihe darstellbar, so lautet diese

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

Besitzt diese Reihe den Konvergenzradius $\rho > 0$, so stellt die Potenzreihe p die Funktion f für $x \in U_\rho(x_0) = (x_0 - \rho, x_0 + \rho)$ dar.

ii) Breche die Reihe nach dem n-ten Glied ab.
Erhalte dann:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \mathrm{Rest}_{(n)} \\ &=: p_n(x,x_0) + \mathrm{Rest}_{(n)}. \end{aligned}$$

$p_n(x, x_0)$ ist ein Polynom in x vom Grad n und heißt das "n-te Taylorpolynom zu f an der Stelle x_0"

Man macht dann den Fehler

$$f(x) - p_n(x,x_0) \quad = \quad \mathrm{Rest}_{(n)} \quad = \quad R_n$$

mit einem Rest R_n.

2.4.3 Abschätzung des Restes (Satz von Taylor)

Satz: Sei f (n+1)-mal differenzierbar auf [a,b], und sei $x_0 \in (a,b)$. Dann gilt:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n = p_n(x,x_0) + R_n$$

mit dem Taylorpolynom $p_n(x,x_0)$ und dem Rest $R_n = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$ für ein ξ aus [a,b].
Stellt man f lokal bei x_0 durch das n-te Taylorpolynom $p_n(x,x_0)$ dar, so folgt die Fehlerabschätzung

$$|f(x) - p_n(x,x_0)| = |R_n| = \left|\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)\right| = \frac{1}{(n+1)!}\left|(x-x_0)^{n+1}\right|\left|f^{(n+1)}(\xi)\right|.$$

<u>Beispiele für Potenzreihen:</u>

a) $f(x) = \exp(x), \quad x_0 = 0$
Es gilt: $f^{(i)}(x) = \exp(x), \quad i = 0,1,2,\ldots \qquad f^{(i)}(0) = \exp(0) = 1, \quad i = 0,1,2,\ldots$
Wir erhalten

$$\begin{aligned}\exp(x) &= 1 + \tfrac{1}{1!}x + \tfrac{1}{2!}x^2 + \tfrac{1}{3!}x^3 + \ldots \\ &= 1 + x + \tfrac{x^2}{2!} + \tfrac{x^3}{3!} + \ldots \qquad = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\end{aligned}$$

"Exponentialreihe"

Der Konvergenzradius ist $\rho = \infty$,
d.h. die Exponentialreihe stellt die Funktion $exp(x)$ für $x \in \mathbb{R}$ dar.

b) $f(x) = \sin(x), \quad x_0 = 0$
$f'(x) = \cos(x), \quad f''(x) = -\sin(x), \quad f^{(3)}(x) = -\cos(x), \quad f^{(4)}(x) = \sin(x),$
$f^{(5)}(x) = \cos(x)$

$\underline{x_0 = 0:}\quad f(0) = \sin(0) = 0, \quad f'(0) = \cos(0) = 1, \quad f''(0) = 0, \quad f^{(3)}(0) = -1,$
$f^{(4)}(0) = f(0) = 0, \quad f^{(5)}(0) = f'(0) = 1$

Dies liefert die Reihe:

$$\sin(x) = +\frac{1}{1!}x + \frac{0}{2!}x^2 + \frac{(-1)}{3!}x^3 + \frac{0}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{0}{6!}x^6 + \frac{(-1)}{7!}x^7 + \ldots$$

$f(x) = sin(x)$ ist, wie man sieht, eine ungerade Funktion, weil die geraden Potenzen in der Potenzreihe verschwinden.

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} = \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!}$$

"Sinus-Reihe"

Konvergenzradius $\rho = \infty$ d.h. die Sinus-Reihe stellt die Funktion $\sin(x)$ für $x \in \mathbb{R}$ dar.

Genauigkeit einer Restgliedabschätzung für $f(x) = \sin(x),\ n = 4,\ x_0 = 0,\ x \in [-1,1]$,

$p_n(x,x_0) = x - \frac{x^3}{3!}$

<u>Fehlerabschätzung:</u>

$$|f(x) - p_n(x,x_0)| = |R_n| = \left|\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)\right| \quad \text{für ein } \xi \in [a,b]$$

Anwenden liefert

$$\left|\sin(x) - \left(x - \frac{x^3}{3!}\right)\right| = |R_4| = \left|\frac{x^5}{5!}\cos(\xi)\right| = \frac{1}{5!}\underbrace{|x^5|}_{\leq 1 \text{ für } x\in[-1,1]} \cdot \underbrace{|\cos(\xi)|}_{\leq 1} \leq \frac{1}{5!} = \frac{1}{120}, \quad x \in [-1,1].$$

c) $f(x) = \frac{1}{1-x}, \quad x_0 = 0$

Man findet, dass die Potenzreihendarstellung von f durch die geometrische Reihe gegeben ist, d.h. $\frac{1}{1-x} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k, \quad |x| < 1.$

Der Konvergenzradius ist $\rho = 1$.

2.4.4 Approximation von Funktionen mittels Taylorpolynomen

Sei $f(x) = \frac{1}{1+x}, \quad x > -1$ und $x_0 = 1$

Berechne die Taylorpolynome $p_n(x,1)$ für $n = 0,1,2,3$.

$$
\begin{array}{lll}
 & f(1) = \frac{1}{2} & p_0(x,1) = \frac{1}{2} \\
f'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} & f'(1) = \frac{-1}{4} & p_1(x,1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x-1) \\
f''(x) = \frac{2}{(1+x)^3} & f''(1) = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow & p_2(x,1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x-1) + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}(x-1)^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x-1) + \frac{1}{8}(x-1)^2 \\
f'''(x) = -\frac{6}{(1+x)^4} & f'''(1) = \frac{-3}{8} & p_3(x,1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x-1) + \frac{1}{8}(x-1)^2 - \frac{1}{6}\cdot\frac{3}{8}(x-1)^3
\end{array}
$$

In einer kleinen Umgebung von $x_0 = 1$ stellen die Polynome $p_n(x,1)$ mit wachsendem n die Funktion f immer besser dar.

2.4.5 Berechnung unbestimmter Ausdrücke

Definition: Unbestimmte Ausdrücke sind Ausdrücke der Form

$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ mit $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ oder $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$.

Mit Hilfe der Potenzreihenentwicklung (Taylorentwicklung) lassen sich solche Ausdrücke nun problemlos berechnen:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}\pm\ldots\right)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x\left(1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}\pm\ldots\right)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}\pm\ldots\right) = 1$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^n}{\exp(x)}$

Nach dem Satz von Taylor ist $\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\exp(\xi)$ für ein $\xi \in [0, x]$

$\Rightarrow \quad \frac{x^n}{\exp(x)} \leq \frac{x^n}{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\exp(\xi)} = \frac{(n+1)!}{x\exp(\xi)} \leq \frac{(n+1)!}{x}$

$\Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^n}{\exp(x)} = 0$ für $n \in \mathbb{N}$ "Exponential wächst schneller als jede Potenz"

Eine weitere Möglichkeit zur Berechnung unbestimmter Ausdrücke bieten die l'Hospitalschen Regeln.

Satz: Seien f,g n-mal differenzierbar mit $f(x_0) = f'(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$,

$g(x_0) = g'(x_0) = \ldots = g^{(n-1)}(x_0) = 0$ und $g^{(n)}(x_0) \neq 0$

Dann existiert der Grenzwert $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$, und es gilt:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{g^{(n)}(x_0)}$$

Betrachte wieder das Beispiel a), d.h. $x_0 = 0, \quad f(x) = \sin(x), \quad g(x) = x$.
Wende l'Hospitalsche Regeln an für n=1 und finde $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos(x)}{1} = \frac{1}{1} = 1$.

Bemerkung: Eine analoge Formel gilt auch für $x \to \pm\infty$: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$,

falls $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$ existiert.

Beispiel: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(x)}{x^n} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{n\cdot x^{n-1}} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{n\cdot x^n} = 0$ "Jede Potenz wächst schneller als der Logarithmus"

Kapitel 3

Integralrechnung mit einer Variablen

3.1 Unbestimmte Integrale

3.1.1 Stammfunktionen

Definition: Sei $f : D \to \mathbb{R}$ stetig. Eine differenzierbare Funktion $F : D \to \mathbb{R}$ heißt Stammfunktion zu f, falls

$$F'(x) = f(x), \quad x \in D.$$

Beispiele:

i) $F(x) = -\cos(x)$ ist Stammfunktion zu $f(x) = \sin(x)$,
dann gilt: $F'(x) = (-\cos(x))' = -(-\sin(x)) = \sin(x) = f(x)$

ii) $F(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2$ ist Stammfunktion zu $f(x) = x^3 + x$.
Finde $F'(x) = \left(\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2\right)' = x^3 + x = f(x)$

Satz: Je zwei Stammfunktionen F_1 und F_2 von f unterscheiden sich höchstens um eine Konstante.

$$\begin{aligned}
&(F_1 - F_2)'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0, \quad x \in D \\
\Rightarrow \quad &(F_1 - F_2)(x) = c, \quad x \in D \\
\Rightarrow \quad &F_1(x) = F_2(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Definition: Die Menge aller Stammfunktionen zu einer Funktion f heißt das unbestimmte Integral von f und wird durch das Symbol $\int f(x)dx$ beschrieben. Es gilt:

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

Satz: Zu jeder stetigen Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ Intervall, existiert stets eine Stammfunktion $F : D \to \mathbb{R}$.

3.1.2 Liste der wichtigsten Stammfunktionen F zu $f : D \to \mathbb{R}$

f	0	$x^n,\ n \in \mathbb{N}$	$\exp(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\frac{1}{x}$	$x^{-\alpha},\ \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 1$
F	c	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$	$\exp(x)$	$-\cos(x)$	$\sin(x)$	$\ln(x)$	$\frac{1}{1-\alpha}x^{1-\alpha}$
D	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$(0, \infty)$	$(0, \infty)$

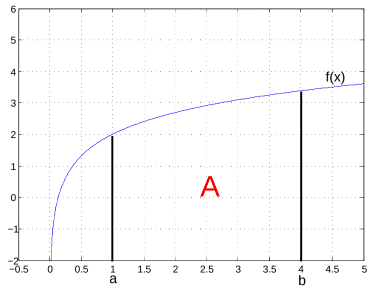
Beispiele:

$$\begin{aligned}
\int x^4 + 2x^3 + 4x + 10\,dx &= \tfrac{1}{5}x^5 + 2 \cdot \tfrac{1}{4}x^4 + 4 \cdot \tfrac{1}{2}x^2 + 10x + c \\
&= \tfrac{1}{5}x^5 + \tfrac{1}{2}x^4 + 2x^2 + 10x + c \\
\int x^{\frac{2}{3}}\,dx &= \tfrac{1}{\frac{2}{3}+1}x^{\frac{2}{3}+1} + c = \tfrac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} + c \\
\int 20\exp(2x)dx &= 20 \cdot \tfrac{1}{2}\exp(2x) + c = 10\exp(2x) + c \\
\int \sin(x) + x^7\,dx &= -\cos(x) + \tfrac{1}{8}x^8 + c
\end{aligned}$$

3.2 Das bestimmte Riemann-Integral

3.2.1 Geometrische Motivation

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion.
Ziel: Berechne den Flächeninhalt A zwischen f(x) und der x-Achse für $a \leq x \leq b$



Definition:

a) Gegeben sei ein Intervall $[a, b] : (N + 1)-$Zahlen.
$x_0, x_1, \ldots, x_N$ mit $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_N = b$ heißen eine Partition von $[a, b]$.
Für $1 \leq k \leq N$ heißt $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ k-tes Teilintervall und $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ die Länge von I_k

b) Sei nun $w_k \in [x_{k-1}, x_k]$. Dann heißt $S = \sum_{i=1}^{N} f(w_i)(x_i - x_{i-1})$ Riemann-Summe zu f über [a,b] zur gegebenen Partition. Wählt man nun die Stelle $\underline{w}_i$ $(\bar{w}_i)$ im Intervall $[x_{i-1}, x_i]$, so dass $f(\underline{w}_i) \leq f(x)$ für $x \in [x_{i-1}, x_i]$ $\quad (f(\bar{w}_i) \geq f(x))$ für $x \in [x_{i-1}, x_i]$, so heißt
$S_{min} = \sum\limits_{i=1}^{N} f(\underline{w}_i)(x_i - x_{i-1}) \qquad (S_{max} = \sum\limits_{i=1}^{N} f(\bar{w}_i)(x_i - x_{i-1}))$
Riemann'sche Untersumme (Obersumme) zu f über $[a, b]$ zur gegebenen Partition.

Definition:

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Dann ist f auf $[a, b]$ genau dann Riemann-integrierbar, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Partition existiert mit
$S_{max} - S_{min} < \varepsilon$.
Bei Verfeinerung der Partition gilt dann $S_{max} \to A$, $S_{min} \to A$ für ein $A \in \mathbb{R}$, und man schreibt dann
$A = \int\limits_a^b f(x)dx$.

Bemerkung: Man erhält auf diese Weise im allgemeinen den so genannten orientierten Flächeninhalt, d.h. Flächen oberhalb der x-Achse werden positiv gezählt und Flächen unterhalb gehen negativ ein.

3.2.2 Beispiel zur Flächenberechnung

Sei $f(x) = 2x,\ 0 \leq x \leq 1$. Wähle eine Partition der Länge N, nämlich
$x_0 = 0,\ x_1 = \frac{1}{N},\ x_2 = \frac{2}{N}, \dots,\ x_{N-1} = \frac{N-1}{N},\ x_N = \frac{N}{N} = 1,$
d.h. $x_i = \frac{i}{N},\ \triangle x_i = x_i - x_{i-1} = \frac{i}{N} - \frac{i-1}{N} = \frac{1}{N}, \quad i = 1, \dots, N$

Es gilt $\underline{w}_i = \frac{i-1}{N}, \quad \bar{w}_i = \frac{i}{N}, \quad i = 1, \dots, N$

Also finden wir $S_{min} = \sum\limits_{i=1}^{N} f(\underline{w_i}) \triangle x_i = \sum\limits_{i=1}^{N} 2\frac{i-1}{N} \cdot \frac{1}{N} = \frac{2}{N^2} \sum\limits_{i=1}^{N} i - 1$

Analog folgt $S_{max} = \sum\limits_{i=1}^{N} f(\bar{w}_i) \triangle x_i = \sum\limits_{i=1}^{N} \frac{2i}{N} \cdot \frac{1}{N} = \frac{2}{N^2} \sum\limits_{i=1}^{N} i$

$$\sum_{i=1}^{N} i = (1 + 2 + 3 + \dots + (N-2) + (N-1) + N) = \frac{N(N+1)}{2}$$
$$\sum_{i=1}^{N} (i-1) = \frac{N(N-1)}{2}.$$

Benutze diese Relationen und erhalte:

$$S_{min} = \frac{2}{N^2} \sum_{i=1}^{N} (i-1) = \frac{2}{N^2} \cdot \frac{N(N-1)}{2} = \frac{N-1}{N} = 1 - \frac{1}{N} \to 1 \text{ für } N \to \infty$$

$$S_{max} = \frac{2}{N^2} \sum_{i=1}^{N} i = \frac{2}{N^2} \cdot \frac{N(N+1)}{2} = \frac{N+1}{N} = 1 + \frac{1}{N} \to 1 \text{ für } N \to \infty$$

$\lim\limits_{N \to \infty} S_{min} = \lim\limits_{N \to \infty} S_{max} = 1$, d.h. $f(x) = 2x$ ist integrierbar über $[0, 1]$ und es gilt: $\int\limits_0^1 2x\ dx = 1$.
Im allgemeinen ist das viel zu mühsam!

Beachte das Folgende: $\int 2x\ dx = x^2 + c = F(x)$

Nun gilt: $F(1) - F(0) = 1^2 + c - 0^2 - c = 1 = \int\limits_0^1 2x\ dx$ Dies ist auch allgemein richtig!

3.2.3 Der Hauptsatz

Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, so ist f Riemann-integrierbar, und es gibt einen wichtigen Zusammenhang zwischen dem bestimmten Integral und der Stammfunktion von f.

Satz: (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, und $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ sei eine Stammfunktion zu f. Dann gilt:

$$\int_a^b f(x)\ dx = F(b) - F(a)$$

Schreibweise: Man schreibt $[F(x)]_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(b)$.

Beispiel: $\int\limits_0^1 2x\ dx = \left[x^2\right]_{x=0}^{x=1} = 1^2 + 0^2 = 1$

Satz (Variante des Hauptsatzes mit oberer Grenze):

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, und sei für jedes $x \in [a, b]$ die Funktion $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ definiert als $F(x) = \int\limits_a^x f(s)\, ds, \quad a \leq x \leq b$. Dann gilt: F ist Stammfunktion zu f, d.h.
F ist differenzierbar, und $F'(x) = f(x)$ für $a \leq x \leq b$.

Beispiele zum Hauptsatz:

$$\int\limits_0^\pi \sin(x) + x^7\, dx = \left[-\cos(x) + \tfrac{1}{8}x^8\right]_{x=0}^{x=\pi} = -\cos(\pi) + \tfrac{\pi^8}{8} + \cos(0) - 0 = 2 + \tfrac{\pi^8}{8}$$

Sei $F(x) = \int\limits_0^x \exp(2s) + 1\, ds$

Anwendung des Hauptsatzes liefert direkt $F'(x) = \exp(2x) + 1$

Elementare Probe: $F(x) = \left[\frac{1}{2}\exp(2s) + s\right]_{s=0}^{s=x} = \frac{1}{2}\exp(2x) + x - \frac{1}{2}\exp(0) - 0 = \frac{1}{2}\exp(2x) + x - \frac{1}{2}$

$F'(x) = \frac{1}{2} \cdot 2\exp(2x) + 1 = \exp(2x) + 1$

Bemerkung: Es reicht aus bei Integralen bei Differentiation nach der oberen Grenze x, die Integrationsvariable s durch x zu ersetzen.

3.2.4 Rechenregeln für bestimmte Integrale

i) $\int\limits_a^b f(x)\, dx = -\int\limits_b^a f(x)\, dx$

ii) $\int\limits_a^a f(x)\, dx = 0$

iii) $\int\limits_a^b f(x)\, dx + \int\limits_b^c f(x)\, dx = \int\limits_a^c f(x)\, dx$

iv) $\int\limits_a^b K f(x)\, dx = K \int\limits_a^b f(x)\, dx$

v) $\int\limits_a^b f(x) \pm g(x)\, dx = \int\limits_a^b f(x)\, dx \ \pm \int\limits_a^b g(x)\, dx$

3.3 Integrationstechniken und uneigentliche Integrale

3.3.1 Partielle Integration

Für differenzierbare Funktionen $u, v : D \to \mathbb{R}$ gilt: $(uv)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x), \quad x \in D$
Integriere dies und erhalte

$$(u \cdot v)(x) = \int (uv)'(x)\, dx = \int u'(x)v(x)\, dx + \int u(x)v'(x)\, dx$$

$$\Rightarrow \quad \int u'(x)v(x)\, dx = (u \cdot v)(x) - \int u(x)v'(x)\, dx$$

Für bestimmte Integrale erhält man

$$\int_a^b u'(x)v(x)\, dx = [u(x) \cdot v(x)]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b u(x)v'(x)\, dx$$

Beispiel:

$$\int \underbrace{x}_{v=x,\ v'=1} \cdot \underbrace{\exp(x)}_{u'=\exp(x),\ u=\exp(x)} dx = x\exp(x) - \int \exp(x)\cdot 1\,dx = x\exp(x) - \exp(x) + c = \exp(x)(x-1)+c$$

Beachte

$$\int \underbrace{x}_{u'=x,\ u=\frac{1}{2}x^2} \underbrace{\exp(x)}_{v=\exp(x),\ v'=\exp(x)} dx = \left[\frac{1}{2}x^2\exp(x)\right] - \int \frac{1}{2}x^2\exp(x)\,dx.$$

Diese Rechnung ist korrekt. Aber das neue Integral ist schwieriger zu lösen als das Alte.

$$\int_1^5 \ln(x)\,dx = \int_1^5 \underbrace{1}_{u'=1,\ u=x} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{v=\ln(x),\ v'=\frac{1}{x}} dx = [x\ln(x)]_{x=1}^{x=5} - \int_1^5 x\frac{1}{x}\,dx = 5\ln(5) - \ln(1) - [x]_{x=1}^{x=5} = 5\ln(5) - 4$$

.

3.3.2 Integration durch Substitution

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ stetig und sei $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $\varphi([a,b]) \subset D$. Sei $F : D \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f. Dann ist $F\circ\varphi$ differenzierbar ($F\circ\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$), und es gilt mit der Kettenregel

$$(F\circ\varphi)'(x) = F'(\varphi(x))\varphi'(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x), \quad x \in [a,b].$$

Integration liefert

$$[(F\circ\varphi)(x)]_{x=a}^{x=b} = \int_a^b (F\circ\varphi)'(x)dx = \int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx\,,$$

d.h.

$$(F\circ\varphi)(b) - (F\circ\varphi)(a) = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)du.$$

Dies liefert die *Substitutionsregel*:
(unbestimmt) $\int f(u)du = \int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$

(bestimmt) $\int\limits_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)du = \int\limits_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$ für $u = \varphi(x)$

Man sagt: Bei der Setzung $u = \varphi(x)$ transformiert sich das Differential du gemäß $du = \varphi'(x)dx$

Beispiele:

i) $\int \underbrace{\sin^3(x)\cos(x)\,dx}_{u=\sin(x),\ dx=\frac{du}{\cos(x)}} = \int u^3 du = \frac{1}{4}u^4 + c = \frac{1}{4}\sin^4(x) + c$

ii) $\int\limits_1^3 \underbrace{\frac{x^2}{\sqrt{2+x^3}}dx}_{u=2+x^3,\ dx=\frac{du}{3x^2}} = \int\limits_3^{29} \frac{1}{3\sqrt{u}}du = \left[\frac{1}{3}\frac{1}{-\frac{1}{2}+1}u^{-\frac{1}{2}+1}\right]_{u=3}^{u=29} = \left[\frac{2}{3}\sqrt{u}\right]_{u=3}^{u=29} = \frac{2}{3}(\sqrt{29}-\sqrt{3})$

Alternativ mit Rücksubstitution $\int\limits_1^3 \frac{x^2}{\sqrt{2+x^3}}dx = \int\limits_{\dots}^{\dots} \frac{1}{3\sqrt{u}}du = \left[\frac{2}{3}\sqrt{u}\right]_{\dots}^{\dots} = \left[\frac{2}{3}\sqrt{2+x^3}\right]_{x=1}^{x=3} = \frac{2}{3}(\sqrt{29}-\sqrt{3})$

Bemerkung: Auch bei Substitution wird lediglich ein Integral durch ein anderes ersetzt. Eine Erleichterung ergibt sich nur, wenn das neue Integral einfacher ist als das Alte.

iii) $\int \underbrace{\frac{3x^2}{x^3+1}dx}_{u=x^3+1,\ dx=\frac{du}{3x^2}} = \int \frac{1}{u}du = \ln(u)+c = \ln(x^3+1)+c$

3.3.3 Integration durch Partialbruchzerlegung

Betrachte den lediglich den wichtigen Spezialfall: $\int \frac{Rx+S}{(x-a)(x-b)}dx$, d.h.

$\int \frac{p(x)}{q(x)}dx$ mit $deg(p) \leq 1$, $\quad deg(q) = 2$ und q hat zwei verschiedene reelle Nullstellen a, b mit $a \neq b$.

Forme jetzt den Integranden um gemäß $\frac{Rx+S}{(x-a)(x-b)} = \frac{\alpha}{(x-a)} + \frac{\beta}{(x-b)}$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ geeignet.
Dies liefert

$$\int \frac{Rx+S}{(x-a)(x-b)}dx = \int \frac{\alpha}{(x-a)}dx + \int \frac{\beta}{(x-b)}dx = \alpha \ln|x-a| + \beta \ln|x-b|,\ x \neq a, b.$$

Beispiel: $\int \frac{2x+3}{x^2-5x+6}dx = \int \frac{2x+3}{(x-2)(x-3)}dx$

$\Rightarrow \quad \frac{2x+3}{(x-2)(x-3)} \overset{!}{=} \frac{\alpha}{x-3} + \frac{\beta}{x-2} \quad \Leftrightarrow \quad 2x+3 = \alpha(x-2)+\beta(x-3) \quad \Leftrightarrow \quad 2x+3 = x(\alpha+\beta) - 2\alpha - 3\beta$

Koeffizientenvergleich liefert dann die Bedingungen $\alpha + \beta = 2 \quad \& \quad -2\alpha - 3\beta = 3$

$\Rightarrow \quad \alpha = 2-\beta \quad \Rightarrow \quad -2(2-\beta) - 3\beta = 3 \quad \Leftrightarrow \quad -4+2\beta-3\beta = 3 \quad \Rightarrow \quad \beta = -7 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 9$

$\Rightarrow \quad \int \frac{2x+3}{x^2-5x+6}dx = \int \frac{9}{x-3}dx - \int \frac{7}{x-2}dx = 9\ln|x-3|) - 7\ln|x-2|, \quad x \neq 2, 3.$

Beachte: Es darf nicht über die Polstellen $x = 2, 3$ hinweg integriert werden.

3.3.4 Uneigentliche Integrale

Analysiere im folgenden Abschnitt Integrale, bei denen entweder das Integrationsintervall unbeschränkt ist $((-\infty, b], [a, \infty))$ oder der Integrand ist an mindestens einer Integralgrenze nicht definiert. Solche Integrale heißen uneigentlich.

Definition (Integrationsintervall unbeschränkt):

Sei $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Existiert der Grenzwert $I = \lim\limits_{b\to\infty} \int\limits_a^b f(x)\,dx$, so heißt er konvergentes uneigentliches Integral von f über $[a, \infty)$ und man schreibt $I = \int\limits_a^\infty f(x)\,dx$
Existiert dieser Grenzwert nicht, so heißt das uneigentliche Integral divergent.

Beispiel:

- $\int\limits_a^\infty \exp(-x)\,dx = \lim\limits_{b\to\infty} \int\limits_a^b \exp(-x)\,dx = \lim\limits_{b\to\infty} [-\exp(-x)]_{x=a}^{x=b} = \lim\limits_{b\to\infty} (\underbrace{-\exp(-b)}_{\to 0} + \exp(-a)) =$ $\exp(-a)$ d.h. das uneigentliche Integral ist konvergent und $I = \exp(-a)$.
- Analog verfährt man mit $f : (-\infty, b] \to \mathbb{R}$, f stetig. Sei $b < 0$, so findet man
  $\int\limits_{-\infty}^b \frac{1}{x^2}dx = \lim\limits_{a\to-\infty} \int\limits_a^b \frac{1}{x^2} = \lim\limits_{a\to-\infty} [-\frac{1}{x}]_{x=a}^{x=b} = \lim\limits_{a\to-\infty} \left(\frac{1}{|b|} + \underbrace{\frac{1}{a}}_{\to 0} \right) = \frac{1}{|b|}$
- Im Fall $f : (-\infty, \infty) \to \mathbb{R}$, f stetig, geht man wie folgt vor:
  Setze $I = \lim\limits_{a\to-\infty} \int\limits_a^c f(x)\,dx + \lim\limits_{b\to\infty} \int\limits_c^b f(x)\,dx$, falls für ein c mit $a < c < b$ beide Grenzwerte

existieren.

Beispiel: Mit $c = 0$ folgt

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(-|x|)dx = \lim_{a\to-\infty} \int\limits_{a}^{0} \exp(-|x|)dx + \lim_{b\to\infty} \int\limits_{0}^{b} \exp(-|x|)dx = \lim_{a\to-\infty} [\exp(x)]_{x=a}^{x=0} + \lim_{b\to\infty} [-\exp(-x)]_{x=0}^{x=b} =$$

$$= \underbrace{\lim_{a\to-\infty} (1-\exp(a))}_{=1} + \underbrace{\lim_{b\to\infty} (1-\exp(-b))}_{=1} = 2.$$

Satz:

Es seien $f, g : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt:

a) Ist $|f(x)| \le g(x),\ x \ge a,$ und ist $\int\limits_{a}^{\infty} g(x)\,dx$ konvergent, so ist auch $\int\limits_{a}^{\infty} f(x)\,dx$ konvergent.

b) Ist $f(x) \ge |g(x)|,\ x \ge a,$ und ist $\int\limits_{a}^{\infty} |g(x)|\,dx$ divergent, so ist auch $\int\limits_{a}^{\infty} f(x)\,dx$ divergent.

Definition (eine kritische Grenze, Integrationsintervall beschränkt):

Sei $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion, welche über jedem Intervall der Form $[a + \varepsilon, b],\ \varepsilon > 0$ stetig ist. Existiert der Grenzwert $I = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$, so heißt das uneigentliche Integral konvergent, und man schreibt $I = \int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx$

Beispiel:

- $\int\limits_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{0+\varepsilon}^{1} x^{\frac{-1}{2}} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \left[\frac{1}{\frac{-1}{2}+1} x^{\frac{-1}{2}+1}\right]_{x=\varepsilon}^{x=1} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} [2\sqrt{x}]_{x=\varepsilon}^{x=1} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}(2 - 2\sqrt{\varepsilon}) = 2$

- $\int\limits_{0}^{1} \frac{1}{x}dx = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\varepsilon}^{1} \frac{1}{x}dx = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} [\ln(x)]_{x=\varepsilon}^{x=1} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}(\ln(1) - \ln(\varepsilon)) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} -\ln(\varepsilon) = \infty$
  Dieses Integral ist divergent!

Definition (beide Integrationsgrenzen kritisch):

Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine Funktion, welche auf jedem Intervall der Form $[a + \varepsilon_1, b - \varepsilon_2],\ \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ stetig ist. Existieren für ein $c \in (a, b)$ die Grenzwerte $I = \lim\limits_{\varepsilon_1\to 0} \int\limits_{a+\varepsilon_1}^{c} f(x)\,dx + \lim\limits_{\varepsilon_2\to 0} \int\limits_{c}^{b-\varepsilon_2} f(x)\,dx$, so heißt das Integral konvergent und man schreibt $I = \int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx$.

Beispiel:

$$\begin{aligned}
\int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx &= \lim_{\varepsilon_1\to 0} \int\limits_{-1+\varepsilon_1}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx + \lim_{\varepsilon_2\to 0} \int\limits_{0}^{1-\varepsilon_2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \\
&= \lim_{\varepsilon_1\to 0} [\arcsin(x)]_{x=-1+\varepsilon_1}^{x=0} + \lim_{\varepsilon_2\to 0} [\arcsin(x)]_{x=0}^{x=1-\varepsilon_2} \\
&= \lim_{\varepsilon_1\to 0} (-\arcsin(-1+\varepsilon_1)) + \lim_{\varepsilon_2\to 0} (\arcsin(1-\varepsilon_2)) \\
&= -\underbrace{\arcsin(-1)}_{=-\frac{\pi}{2}} + \underbrace{\arcsin(1)}_{=\frac{\pi}{2}} \;=\; \pi \qquad \text{(konvergentes Integral).}
\end{aligned}$$

Hierbei wurde

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1$$

benutzt. Mit Hilfe der Umkehrregel findet man

$$\begin{aligned} \arcsin'(x) &= (\sin^{-1}(x))' = \frac{1}{\sin'(\arcsin(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \end{aligned}$$

Kapitel 4

Differentialrechnung in N Variablen

4.1 Der Raum $\mathbb{R}^N$

4.1.1 Ein ökonomisches Beispiel

Die Nachfrage q^N nach einer Ware sei gegeben durch $q^N = a - bp + cy$

$p =$ Standardpreis
$y =$ Einkommen
$a, b, c > 0$ Parameter

q^N ist also eine Funktion von Preis p und des Einkommens y, d.h. $q^N = q^N(p, y) := a - bp + cy$
Noch präziser hängt q^N auch noch von a,b,c ab, d.h. $q^N = q^N(p, y, a, b, c) = a - bp + cy$
Wir müssen also den Funktionenbegriff und unsere Werkzeuge erweitern: Funktionen einer Variablen zu Funktionen in mehreren Variablen.

Sei N die Anzahl der Variablen.
Ein Objekt $x = (x_1, x_2, \dots, x_N),\ x_i \in \mathbb{R},\ i = 1, \dots, N$.
x heißt Vektor und $x_i,\ i = 1, \dots, N$ ist die i-te Komponente von x.
Der Raum aller solcher Vektoren ist der $\mathbb{R}^N = \{(v_1, v_2, \dots, v_n)|\ v_i \in \mathbb{R},\ i = 1, \dots, N\}$
Wir schreiben $x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$

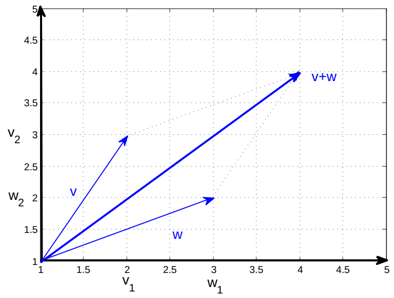
$N = 1:$	$\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$	reelle Zahlengerade	
$N = 2:$	$\mathbb{R}^2$	$x = (x_1, x_2)$ Ebene	2-dimensional
$N = 3:$	$\mathbb{R}^3$	$x = (x_1, x_2, x_3)$ Raum	3-dimensional
$N \geq 4:$	$\mathbb{R}^4$	keine Anschauung mehr möglich	

4.1.2 Vektoren im $\mathbb{R}^N$

Seien $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \dots \\ w_N \end{pmatrix}$, $\quad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_N \end{pmatrix}$, $\quad v, w \in \mathbb{R}^N$, $\qquad$ Beispiel $N = 4, v = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$

<u>Addition von Vektoren</u>

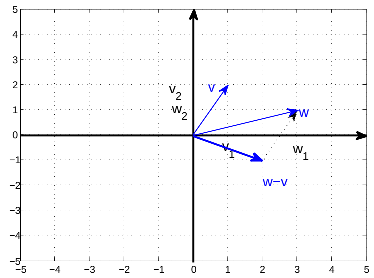
$$w + v = \begin{pmatrix} w_1 + v_1 \\ w_2 + v_2 \\ \dots \\ w_N + v_N \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N$$



Vektoren im $\mathbb{R}^N$ können als Pfeile dargestellt werden

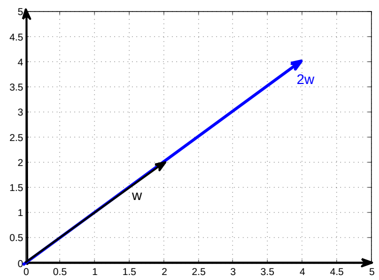
<u>Subtraktion von Vektoren</u>

$$w - v = \begin{pmatrix} w_1 - v_1 \\ w_2 - v_2 \\ \dots \\ w_N - v_N \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N$$



Man kann einen Vektor auch mit einer reellen Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ multiplizieren.

$$w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \dots \\ w_N \end{pmatrix}, \ \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda w = \begin{pmatrix} \lambda w_1 \\ \lambda w_2 \\ \dots \\ \lambda w_N \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N$$

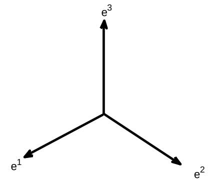


Besonders ausgezeichnete Vektoren: <u>Einheitsvektoren im $\mathbb{R}^N$</u>

$$e^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \quad e^N = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vektoren in Richtung der Koordinatenachsen

Beispiel: $N = 3$ $\quad e^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

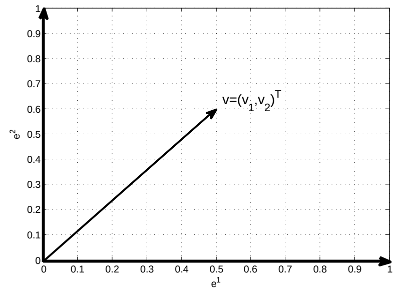


4.1.3 Länge von Vektoren

Sei $N = 2, \quad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

Mit dem Satz des Pythagoras erhält man:
Länge von $v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$

Man schreibt hierfür: $||v||_2 = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}, \; v \in \mathbb{R}^2$



Für $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_N \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N$ ergibt sich für die Länge

$$||v||_2 = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_N^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} v_i^2}$$

Bsp.: $N = 4, \quad v = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 7 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad ||v||_2 = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 7^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{52}$

$||v||_2$ heißt die euklidische Norm von v. Ein Vektor der Länge 1 heißt normiert.
Sei $v \in \mathbb{R}^N$ beliebig, so ist

$$w = \frac{v}{||v||_2}$$

ein normierter Vektor.

Sei $w = \frac{1}{\sqrt{52}} \begin{pmatrix} (-1) \\ 0 \\ 7 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$, so folgt: $||w||_2 = \frac{\sqrt{52}}{\sqrt{52}} = 1$.

Die euklidische Norm $||v||_2 = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_N^2}$ hat folgenden Eigenschaften:

i) $||v||_2 \geq 0$ für alle $v \in \mathbb{R}^N$

$||v||_2 = 0$ genau dann, wenn $v = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

ii) $||\lambda v||_2 = |\lambda| \cdot ||v||_2$ für $\lambda \in \mathbb{R}, \; v \in \mathbb{R}^N$

iii) $||v + w||_2 \leq ||v||_2 + ||w||_2$ für $v, w \in \mathbb{R}^N$ ("Dreiecksungleichung")

$||.||_2$, d.h. die euklidische Norm dient der Längenmessung im $\mathbb{R}^N$.
Alternativ kann man zur Längenmessung auch wählen $||v||_\infty = \max\{|v_i| \mid i = 1, \dots, N\}$

Bsp.: $N = 4, \quad v = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 7 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad ||v||_\infty = \max\{|v_1|, |v_2|, |v_3|, |v_4|\} = \max\{|-1|, |0|, |7|, |\sqrt{2}|\} = 7$

Beachte: Auch für die $\infty-$Norm gilt:

i) $||v||_\infty \geq 0$ für alle $v \in \mathbb{R}^N$

$||v||_\infty = 0$ genau dann, wenn $v = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

ii) $||\lambda v||_\infty = |\lambda| \cdot ||v||_\infty$ für $\lambda \in \mathbb{R},\ v \in \mathbb{R}^N$

iii) $||v + w||_\infty \leq ||v||_\infty + ||w||_\infty$ für $v, w \in \mathbb{R}^N$ ("Dreiecksungleichung")

Allgemein nennt man eine Abb: $|| \cdot || : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ mit i)-iii) eine Norm auf $\mathbb{R}^N$. $||.||_2$ und $||.||_\infty$ sind also Normen. Normen dienen der Längenmessung. $||.||_2$ entspricht der realen physikalischen Länge.

4.1.4 Winkel zwischen 2 Vektoren

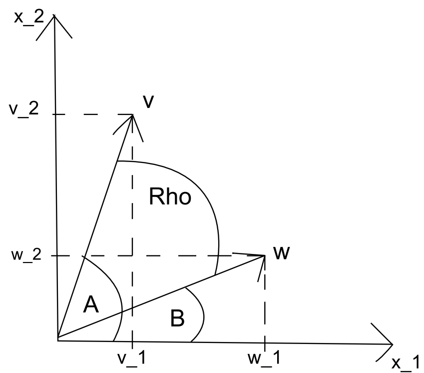
$N = 2$ Sei $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix},\ w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix},\ v, w \in \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$

Gesucht: $\angle(v, w)$=Winkel zwischen v und w

Mit der Trigonometrie gilt:

$$\cos(A) = \frac{v_1}{||v||_2} \qquad \cos(B) = \frac{w_1}{||w||_2}$$

$$\sin(A) = \frac{v_2}{||v||_2} \qquad \sin(B) = \frac{w_2}{||w||_2}$$



Additionstheorem

$\cos(A - B) = \cos(A)\cos(B) + \sin(A)\sin(B)$

$\cos(\angle(v, w)) = \cos(\rho) = \cos(A - B) = \frac{v_1}{||v||_2} \cdot \frac{w_1}{||w||_2} + \frac{v_2}{||v||_2} \cdot \frac{w_2}{||w||_2} = \frac{v_1 w_1 + v_2 w_2}{||v||_2 \cdot ||w||_2}$

Für zwei Vektoren $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_N \end{pmatrix},\ w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_N \end{pmatrix},\ v, w \in \mathbb{R}^N$ gilt:

$$\cos(\angle(v, w)) = \frac{v_1 w_1 + v_2 w_2 + \ldots + v_N w_N}{||v||_2 ||w||_2} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} v_i w_i}{||v||_2 ||w||_2}$$

Gilt nun $\angle(v,w) = 90°$, d.h. die Vektoren stehen senkrecht, so erhalten wir:

$$0 = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sum_{i=1}^{N} v_i w_i}{||v||_2 \, ||w||_2}$$

Man sagt: v und w sind orthogonale Vektoren und schreibt: $v \perp w$

Für $v,\, w \in \mathbb{R}^N$ schreibt man $\langle v, w\rangle = \sum_{i=1}^{N} v_i w_i$ ("Skalarprodukt")

v und w, $v, w \neq 0$ stehen senkrecht genau dann, wenn $\langle v, w\rangle = \sum_{i=1}^{N} v_i w_i = 0$.

Zwischen dem Skalarprodukt und der euklidischen Norm besteht der Zusammenhang:

$$\langle v, v\rangle = \sum_{i=1}^{N} v_i v_i = \sum_{i=1}^{N} v_i^2 = ||v||_2^2, \quad \text{d.h.} \quad ||v||_2 = \sqrt{\langle v, v\rangle}.$$

4.1.5 Teilmengen des $\mathbb{R}^N$

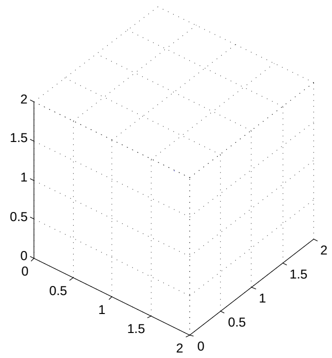
Analog zu $\mathbb{R}$ lassen sich auch in $\mathbb{R}^N$ Teilmengen auszeichnen. Teilmengen M des $\mathbb{R}^N$ haben die Struktur

$$M \quad := \quad \{(v_1, \ldots, v_N) | (v_1, \ldots v_N) \text{ hat Eigenschaft } E\}.$$

Beispiele:

$M_1 := \{(v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 0 \leq v_1 \leq 2,\ 0 \leq v_2 \leq 2,\ 0 \leq v_3 \leq 2\} \subset \mathbb{R}^3$

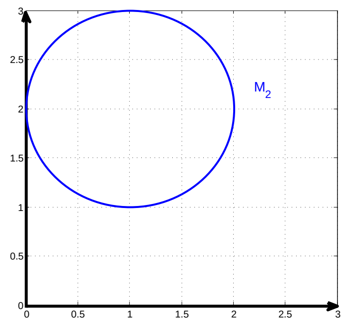
M_1 definiert einen Kasten im Raum mit linker unterer Ecke im Ursprung und rechter oberer Ecke $w = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$



$M_2 = \{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (u_1 - 1)^2 + (u_2 - 2)^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^2$

M_2 beschreibt eine Kreislinie in $\mathbb{R}^2$ mit Mittelpunkt $(1, 2)$ und Radius 1.

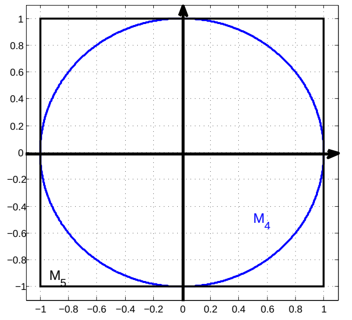
Außerhalb der Kreislinie M_2 im $\mathbb{R}^2$:
$M_3 = \{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (u_1 - 1)^2 + (u_2 - 2)^2 > 1\}$



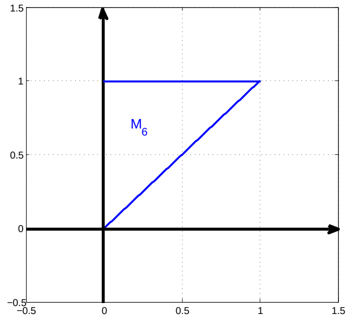
Einheitskreis: Kreis mit Radius 1 um den Ursprung.

$M_4 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 |\ x_1^2 + x_2^2 = ||x||_2^2 = 1\}$

In der $||\cdot||_\infty$-Norm gilt
$M_5 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 |\ ||x||_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\} = 1\}$



$M_6 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 |\ 0 \le x_1 \le x_2 \le 1\}$



4.2 Funktionen in mehreren Variablen

4.2.1 Definition reellwertiger Funktionen

Betrachtet werden reellwertige Funktionen g mit einem Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}^N$. Man schreibt diese in der Form

$$\begin{array}{ll} g: D & \to \mathbb{R} \\ u = (u_1, \ldots, u_N) & \mapsto g(u) = g(u_1, \ldots, u_N) \end{array}$$

Beachte: Dies bedeuted $u = (u_1, \ldots, u_N) \in D$ und $g(u) = g(u_1, \ldots, u_N) \in \mathbb{R}$.

Beispiel aus 1.1.1: Mit $g = q^N$, $u_1 = p$, $u_2 = y$ folgt $g(u_1, u_2) = a - bu_1 + cu_2, \quad a, b, c > 0$ und $g(1, 2) = a - b + 2c$

4.2.2 Graphische Darstellung von Funktionen mehrerer Veränderlicher

Sei $g : D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}^N,\ u \to g(u) = g(u_1, \ldots, u_n)$ eine reellwertige Funktion.

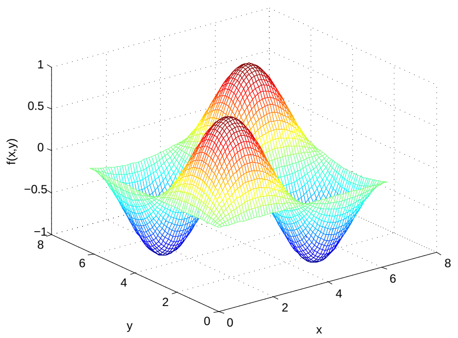
Flächendarstellung:

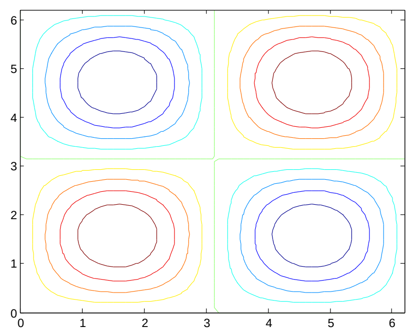
$(u_1, u_2, \ldots u_N, g(u_1, \ldots, u_N)) \subset \mathbb{R}^{N+1}$,
$(u_1, \ldots, u_n) \in D$

Höhendarstellung:

Zeichne in die Definitionsmenge D die Kurven gleicher Höhe h. Dies sind die Lösungen der Gleichung $g(u_1, \ldots, u_n) = h$, h fest vorgegeben. Mache dies für mehrere Höhen h.

Vernünftig darstellbar sind beide Möglichkeiten, falls $N = 2$. Dann ist $(u_1, u_2, g(u_1, u_2))$ eine Fläche im $\mathbb{R}^3$ (linkes Bild) und $g(u_1, u_2) = h$ für mehrere Höhen h die Höhendarstellung in $\mathbb{R}^2$ derselben Funktion (rechtes Bild).





4.2.3 Partielle Ableitungen bei Funktionen mehrerer Veränderlicher

Sei $f : D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}^N,\ f(x) = f(x_1, \ldots, x_N)$ eine reelle Funktion. Ferner sei $y = (y_1, \ldots, y_N) \in D$.

Definition:

f heißt stetig in $y = (y_1, \ldots, y_N) \in D$, falls für jede Folge von Vektoren $x^i = (x_1^i, \ldots, x_N^i),\ i \in \mathbb{N}$ mit $\lim\limits_{i\to\infty} x^i = y\ \in D$ gilt:

$$\lim_{i\to\infty} f(x^i) = \lim_{i\to\infty} f(x_1^i, \ldots, x_N^i) = d \text{ und } d = f(y)$$

Dabei konvergiert eine Folge von Vektoren $x^i = (x_1^i, \ldots, x_N^i) \to y = (y_1, \ldots, y_N)$ genau dann,

$$\text{wenn} \quad \begin{array}{l} x_1^i \to y_1 \\ x_2^i \to y_2 \\ \vdots \\ x_N^i \to y_N \end{array} \quad \text{für } i \to \infty$$

Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}^N$ heißt stetig in D, falls f an jeder Stelle $y = (y_1, \ldots, y_N) \in D$ stetig ist.

Sei $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^N$, $f = f(x_1, \ldots, x_N)$, und sei $y = (y_1, \ldots, y_N) \in D$ fest.

Definition:

f heißt in $y = (y_1, \ldots, y_N) \in D$ partiell differenzierbar nach x_j, falls die reelle Funktion einer Variablen $g(x_j) := f(y_1, \ldots, y_{j-1}, x_j, y_{j+1}, \ldots, y_N)$ im Punkt y_j differenzierbar ist, d.h.

$$\frac{g(y_j + \tau) - g(y_j)}{\tau} = \frac{f(y_1, \ldots, y_{j-1}, y_j + \tau, y_{j+1}, \ldots, y_N) - f(y_1, \ldots, y_{j-1}, y_j, y_{j+1}, \ldots, y_N)}{\tau} \to a \quad \text{für } \tau \to 0$$

Man schreibt $a = \frac{\partial f}{\partial x_j}(y_1, \ldots, y_N) = f_{x_j}(y_1, \ldots, y_N)$

"Partielle Ableitung von f nach x_j an der Stelle $(y_1, \ldots, y_N)$"

f heißt partiell differenzierbar nach x_j, falls f an jedem Punkt $y = (y_1, \ldots, y_N) \in D$ nach x_j partiell differenzierbar ist

f heißt partiell differenzierbar, falls f an jeder Stelle $y \in D$ nach jeder Variablen $x_j,\ j = 1, \ldots, N$ partiell differenzierbar ist.

Den Vektor aller partiellen Ableitungen nennt man Gradient von f

$$\nabla f(y_1, \ldots, y_N) = grad\ f(y_1, \ldots, y_N) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(y_1, \ldots, y_N) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(y_1, \ldots, y_N) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_N}(y_1, \ldots, y_N) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N.$$

Ist dies für alle Punkte $x = (x_1, \ldots, x_N) \in D$ möglich, so erhalten wir die Funktion

$$\nabla f(x_1, \ldots, x_N) = grad\ f(x_1, \ldots, x_N) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \ldots, x_N) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, \ldots, x_N) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_N}(x_1, \ldots, x_N) \end{pmatrix}.$$

∇f ist eine auf D definierte Funktion mit Werten in $\mathbb{R}^N$, d.h. $\nabla f : D \to \mathbb{R}^N$.

Beispiel: $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2 \exp(x_3) - \ln(\underbrace{1 + x_1^2 + x_3^2}_{\geq 1 > 0})$

$f: D = \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ y = (1, 2, 3) \in D$

Berechne die partielle Ableitung von f nach x_1:

$g(x_1) = f(x_1, 2, 3) = x_1^2 \cdot 2\exp(3) - \ln(1 + x_1^2 + 9)$

$g'(x_1) = 2x_1 \cdot 2\exp(3) - \frac{1}{10+x_1^2} \cdot 2x_1 = 4x_1 \exp(3) - \frac{2x_1}{10+x_1^2}$

$g'(1) = 4\exp(3) - \frac{2}{11} = \frac{\partial f}{\partial x_1}(1, 2, 3)$

Kürzer hält man in Gedanken x_2 und x_3 fest, d.h. man behandelt x_2 und x_3 als Konstanten und differenziert nach x_1. Dies liefert direkt

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 x_2 \exp(x_3) - \frac{1}{1 + x_1^2 + x_3^2} \cdot 2x_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x_1}(1, 2, 3) = 4\exp(3) - \frac{2}{11}$$

Berechnung der weiteren partiellen Ableitungen:

$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2, x_3) = \exp(x_3) x_1^2 \cdot 1$

$\frac{\partial f}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2 \exp(x_3) - \frac{2x_3}{1+x_1^2+x_3^2}$

$$\Rightarrow \quad \nabla f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 2x_1 x_2 \exp(x_3) - \frac{2x_1}{1+x_1^2+x_3^2} \\ x_1^2 \exp(x_3) \\ x_1^2 x_2 \exp(x_3) - \frac{2x_3}{1+x_1^2+x_3^2} \end{pmatrix}$$

Definition:

Man nennt $f: D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}^N$ total differenzierbar, falls f an jeder Stelle $y \in D$ partiell nach $x_j,\ j = 1 \ldots, N$, differenzierbar ist und falls die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, \ldots, x_j),\ j = 1, \ldots, N$ in D stetig sind. Man schreibt dann $f'(x_1, x_2, \ldots, x_N),\ Df(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ oder $\nabla f(x_1, \ldots, x_N)$.

Beispiel: $f(x, y, z) = z\exp(x^2 + xy)$

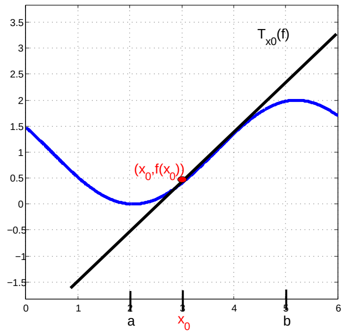
- $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = z\exp(x^2 + xy)(2x + y)$
- $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = z\exp(x^2 + xy)x$
- $\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 1 \cdot \exp(x^2 + xy)$

$$\Rightarrow \quad \nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} z(2x + y)\exp(x^2 + xy) \\ zx\exp(x^2 + xy) \\ \exp(x^2 + xy) \end{pmatrix}$$

4.2.4 Lineare Approximationen von Funktionen

Betrachte den Fall <u>N=1</u>: Sei $D := (a, b)$,
$f : (a, b) \to \mathbb{R}$, und sei $x^0 \in (a, b) = D$
Veranschauliche die Kurve $(x, f(x))$ als Graph
Steigung der Tangente ist $f'(x^0)$

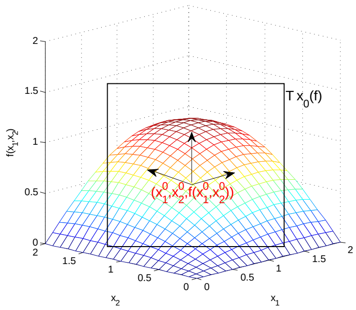
Charakterisierung der Tangente, d.h. von
$T_{x^0}(f) = \{(x, v) |\ v = \underbrace{f(x^0) + f'(x^0)(x - x^0)}_{\text{Taylorpolynom 1.Ordnung}}\}$



<u>N=2:</u> $f : D \to \mathbb{R},\ f(x) = f(x_1, x_2)$, es sei $x^0 = (x^0_1, x^0_2) \in D$

Benutze die Graphendarstellung
$(x, f(x)) = (x_1, x_2, f(x_1, x_2)) \in \mathbb{R}^3$
$T_{x^0}(f)$ heißt Tangentialfläche von f an dem Punkt $x^0 = (x^0_1, x^0_2)$

$T_{x^0}(f) = \{(x_1, x_2, v) |\ v = f(x^0_1, x^0_2) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0_1, x^0_2)(x_1 - x^0_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x^0_1, x^0_2)(x_2 - x^0_2)\}$



<u>Situation in N Variablen:</u> $f : D \to \mathbb{R}, f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_N),\ x^0 = (x^0_1, \ldots, x^0_N) \in \mathbb{R}^N$

Vorstellung des Graphen $(x_1, \ldots, x_N, f(x_1, \ldots, x_N)) \in \mathbb{R}^{N+1}$ nicht mehr möglich.

Darstellung der Tagentialebene:

$$T_{x^0}(f) = \{(x_1, \ldots, x_N, v) |\ v = f(x^0_1, \ldots, x^0_N) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0_1, \ldots, x^0_N)(x_1 - x^0_1) + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_N}(x^0_1, \ldots, x^0_N)(x_N - x^0_N)\}$$

Insbesondere sieht man, $T_{x^0}(f)$ ist eine horizontale Fläche genau dann, wenn alle partiellen Ableitungen verschwinden, d.h.

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x^0_1, \ldots, x^0_N) = 0, \quad j = 1, \ldots, N$$

(vergleiche dies mit $f'(x^0) = 0$ für $N = 1$).

Beachte hierzu: $\quad \nabla f(x^0_1, \ldots, x^0_N) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x_j} \underbrace{(x^0_1, \ldots, x^0_N)}_{= x^0} = 0, \quad j = 1, \ldots, N$

4.2.5 Implizit definierte Funktionen

Bisherige Situation: $f : D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}^N,\ f(x) = f(x_1, \ldots, x_N)$ (explizite Definition einer Funktion)

Beispiel für eine nicht explizit definierte Funktion:

Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1$
Betrachte jetzt die Gleichung $f(x_1, x_2, x_3) = 0 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 \quad (*)$
Charakterisierung der Nullstellenmenge von f, d.h. der Lösung von $(*)$: $\quad ||x||_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ "Länge von x"
$||x||_2^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad ||x||_2 = 1 \quad$ "Länge von x"
Die Nullstellenmenge von f entspricht gerade der Oberfläche der Kugel mit Radius 1 um den Ursprung in $\mathbb{R}^3$ (Oberfläche der Einheitskugel).
Löse die Gleichung z.B. nach x_3 auf: $x_3^2 = 1 - x_1^2 - x_2^2 \quad \Leftrightarrow \quad x_3 = \pm\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2} = \varphi \pm (x_1, x_2)$
$D_{\varphi\pm} = \{(x_1, x_2) |\ 1 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0\}$
Es gilt: $f(x_1, x_2, \varphi \pm (x_1, x_2,)) = x_1^2 + x_2^2 + (\varphi \pm (x_1, x_2))^2 - 1 = x_1^2 + x_2^2 + (1 - x_1^2 - x_2^2) - 1 = 0.$
Man sagt: Durch die Gleichung $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0$ werden implizit die Funktionen $\varphi\pm = \varphi \pm (x_1, x_2),\ D_{\varphi\pm} \to \mathbb{R}$ definiert.

Allgemeine Situation:

Sei $f : D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}^{N+1}$, d.h. $f(x, y) = f(x_1, \ldots, x_N, y)$. Betrachte wieder $f(x_1, \ldots, x_N, y) = 0$.
Diese Gleichung mag für gewisse Argumente $(x_1, \ldots, x_N) \in S \subset \mathbb{R}^N$ eindeutig nach y auflösbar sein.
Die Lösung sei $y = \varphi = \varphi(x_1, \ldots, x_N)$
Dann gilt nach Konstruktion: $f(x_1, \ldots, x_N, \varphi(x_1, \ldots, x_N)) = 0$ für $(x_1, \ldots, x_N) \in S$.
Man sagt: Durch die Gleichung $f(x_1, \ldots, x_N, y) = 0,\ f : D \to \mathbb{R}$ wird implizit eine Funktion $\varphi : S \to \mathbb{R}$ definiert.

Obiges Beispiel schreibt sich dann zu $f(x_1, x_2, y) = x_1^2 + x_2^2 + y^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow y = \varphi \pm (x_1, x_2)$ d.h. die Gleichung $f(x_1, x_2, y) = 0$ ist nach y auflösbar.

Satz (implizite Funktionen):

Sei $F : D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}^{N+1},\ F = F(x_1, \ldots, x_N, y)$ differenzierbar.
Es sei $(x_1^0, \ldots, x_N^0, y^0) \in D$ mit $F(x_1^0, \ldots, x_N^0, y^0) = 0$.
Gilt nun $\frac{\partial F}{\partial y}(x_1^0, \ldots, x_N^0, y^0) \neq 0$, so lässt sich die Gleichung lokal bei $(x_1^0, \ldots, x_N^0, y^0) \in D$ nach y auflösen, d.h. es gibt eine differenzierbare Funktion $\varphi : U_\varepsilon(x_1^0, \ldots, x_N^0) \to \mathbb{R}$
mit $\varphi(x_1^0, \ldots, x_N^0) = y^0$ und $F(x_1, \ldots, x_N, \varphi(x_1, \ldots, x_N)) = 0,\ \ (x_1, \ldots, x_N) \in U_\varepsilon(x_1^0, \ldots, x_N^0)$.

Differentiation der auflösenden Funktion φ:

Betrachte die Gleichung:

$h(x_1, \ldots, x_N) = F(x_1, \ldots, x_N, \varphi(x_1, \ldots, x_N)) = 0, \quad (x_1, \ldots, x_N) \in U_\varepsilon(x_1^0, \ldots, x_N^0)$.
h ist differenzierbar, da F und φ differenzierbar sind. Es gilt nach der Kettenregel

$$\frac{\partial h}{\partial x_j}(x_1, \ldots, x_N) = \frac{\partial F}{\partial x_j}(x_1, \ldots, x_N, \varphi(x_1, \ldots, x_N)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_1, \ldots, x_N, \varphi(x_1, \ldots, x_N)) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x_1, \ldots, x_N) = 0$$

für $j = 1, \ldots, N$.
Ist also $\frac{\partial F}{\partial y}(x_1, \ldots, x_N, \varphi(x_1, \ldots, x_N)) \neq 0$, so folgt

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x_1, \ldots, x_N) = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x_j}(x_1, \ldots, x_N, \varphi(x_1, \ldots, x_N))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_1, \ldots, x_N, \varphi(x_1, \ldots, x_N))}, \quad j = 1, \ldots, N.$$

"implizites Differenzieren"

Beispiel: Sei $F(x_1, x_2, y) = x_1^2 + x_2 - \exp(y)$, $(x_1, x_2, y) \in \mathbb{R}^3$.

Betrachte die Gleichung $F(x_1, x_2, y) = x_1^2 + x_2 - \exp(y) = 0$
Auflösen nach y: $x_1^2 + x_2 = \exp(y) \quad \Leftrightarrow \quad y = \ln(x_1^2 + x_2) = \varphi(x_1, x_2), \quad \varphi : D_\varphi \to \mathbb{R},\ D_\varphi = \{(x_1, x_2) | x_1^2 + x_2 > 0\}$.

Berechne jetzt implizit die partiellen Ableitungen von $\varphi = \varphi(x_1, x_2)$:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x_1, x_2) = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x_1}(x_1, x_2, \varphi(x_1, x_2))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_1, x_2, \varphi(x_1, x_2))} = \frac{-2x_1}{-\exp(\ln(x_1^2 + x_2))} = \frac{-2x_1}{-(x_1^2 + x_2)} = \frac{2x_1}{x_1^2 + x_2}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(x_1, x_2) = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x_2}(x_1, x_2, \varphi(x_1, x_2))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_1, x_2, \varphi(x_1, x_2))} = \frac{-1}{-\exp(\ln(x_1^2 + x_2))} = \frac{1}{x_1^2 + x_2}$$

In diesem Fall kann man die Ableitungen auch elementar berechnen. Für $\varphi(x_1, x_2) = \ln(x_1^2 + x_2)$ findet man

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x_1, x_2) = \frac{1}{x_1^2 + x_2} \cdot 2x_1 = \frac{2x_1}{x_1^2 + x_2} \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{x_1^2 + x_2}$$

.

Anwendung impliziter Funktionen: Höhenlinien und Tangentenrichtung

Betrachte die Gleichung $F(x_1, y) = f(x_1, y) - h = 0$.

Sei diese Gleichung für $x_1 \in (a, b) =: S$ auflösbar nach y, d.h. es gibt eine Funktion $\varphi : (a, b) \to \mathbb{R}$ mit $F(x_1, \varphi(x_1)) = f(x_1, \underbrace{\varphi(x_1)}_{=y}) - h = 0,\ x_1 \in S = (a, b)$

Dies ist gleichbedeutend zu: $f(x_1, \varphi(x_1)) = h,\ x_1 \in S$

Die Punktepaare $(x_1, \varphi(x_1)),\ x_1 \in S$ sind auf Höhenniveau h.

Die Abbildung $T : [a, b] \to \mathbb{R}^2,\ x_1 \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \varphi(x_1) \end{pmatrix}$ beschreibt nun die Höhenlinie zu f auf dem Level h.

Im Allgemeinen nennt man eine Abbildung $K : [a, b] \to \mathbb{R}^N,\ s \mapsto \begin{pmatrix} K_1(s) \\ \vdots \\ K_N(s) \end{pmatrix} = K(s)$

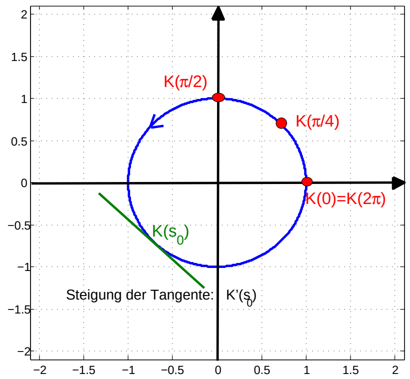
eine Kurve im $\mathbb{R}^N$. s heißt Kurvenparameter.

Beispiel: $K : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$

$$K(s) = \begin{pmatrix} \cos(s) \\ \sin(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_1(s) \\ K_2(s) \end{pmatrix}$$

$$K(0) = \begin{pmatrix} \cos(0) \\ \sin(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$K(\tfrac{\pi}{4}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}$$



K heißt differenzierbar, falls die Funktionen $K_1(s), \dots, K_N(s)$ differenzierbar sind.

$K'(s)$ hat die Darstellung: $K'(s) = \begin{pmatrix} K_1'(s) \\ \vdots \\ K_N'(s) \end{pmatrix}, \quad a \leq s \leq b.$

Der Vektor $K'(s)$ gibt die Tangentenrichtung an die Kurve im Punkt $K(s)$ an.

Erhalte im Beispiel $K(s) = \begin{pmatrix} \cos(s) \\ \sin(s) \end{pmatrix}, \quad K'(s) = \begin{pmatrix} -\sin(s) \\ \cos(s) \end{pmatrix}, \quad 0 \leq s \leq 2\pi.$

Betrachte nun die Höhenkurve $T(x_1) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \varphi(x_1) \end{pmatrix}, \quad x_1 \in S$

<u>Wissen:</u> Die Tangentialrichtung im Punkt $T(x_1)$ ist gegeben durch $T'(x_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ \varphi'(x_1) \end{pmatrix}, \quad x_1 \in S.$

Weiter gilt nach der Kettenregel

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \varphi(x_1)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_1, \varphi(x_1)) \cdot \varphi'(x_1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi'(x_1) = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \varphi(x_1))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_1, \varphi(x_1))}, \quad x_1 \in S.$$

Somit folgt

$$T'(x_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \varphi(x_1))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_1, \varphi(x_1))} \end{pmatrix}.$$

<u>Zusammenhang zwischen Tangentenrichtung und Gradient</u>

Es ist $F(x_1, y) = f(x_1, y) - h$

Gradient von F: $\nabla F(x_1, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1}(x_1, y) \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x_1, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_1, y) \end{pmatrix}$

Entlang der Kurve $(x_1, \varphi(x_1))$ gilt also: $\nabla F(x_1, \varphi(x_1)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \varphi(x_1)) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_1, \varphi(x_1)) \end{pmatrix}$, $x_1 \in S$

Winkel zwischen $T'(x_1)$ und $\nabla f(x_1, \varphi(x_1))$:

Es ist bekannt, dass 2 Vektoren $w, z \in \mathbb{R}^N$ orthogonal sind genau dann, wenn $\langle w, z \rangle = \sum\limits_{i=1}^{N} w_i z_i = 0$.

Berechne

$$\begin{aligned}
\langle T'(x_1), \nabla f(x_1, \varphi(x_1)) \rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,\varphi(x_1))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_1,\varphi(x_1))} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \varphi(x_1)) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_1, \varphi(x_1)) \end{pmatrix} \right\rangle \\
&= 1 \cdot \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \varphi(x_1)) + \left(\frac{-\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,\varphi(x_1))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_1,\varphi(x_1))} \right) \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x_1, \varphi(x_1)) \\
&= \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \varphi(x_1)) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \varphi(x_1)) \\
&= 0, \quad x_1 \in S,
\end{aligned}$$

d.h. $T'(x_1)$ und $\nabla f(x_1, \varphi(x_1))$ stehen senkrecht.

Hierzu sagt man kurz: An jeder Stelle steht der Gradient senkrecht auf den Höhenlinien.

4.2.6 Höhere partielle Ableitungen

Sei $f : D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}^N,\ f(x) = f(x_1, \dots, x_N)$, differenzierbar.

Dann existieren alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_N),\ j = 1, \dots, N,\ (x_1, \dots, x_N) \in D$, d.h.

$\frac{\partial f}{\partial x_j} : D \to \mathbb{R},\ j = 1, \dots, N$

Sind diese Funktionen selbst wiederum partiell differenzierbar nach x_k, so heißen die Funktionen $\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(x_1, \dots, x_N)$ 2-te partielle Ableitungen von f.

Existieren alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(x_1, \dots, x_N)\right)$, $j = 1, \dots, N,\ k = 1, \dots, N,\ (x_1, \dots, x_N) \in D$, so heißt f zweimal partiell differenzierbar in D.

Dies sind N^2-partielle Ableitungen zweiter Ordnung.
Wie man die $\frac{\partial f}{\partial x_j}$, $j = 1, \dots, N$ als Vektor anordnet (Gradient), so ordnet man die $\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}$ in ein rechteckiges Schema mit N Zeilen und N Spalten:

$$\begin{pmatrix}
\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(x_1, \dots, x_N) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, \dots, x_N) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_N}(x_1, \dots, x_N) \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1, \dots, x_N) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2}(x_1, \dots, x_N) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_N}(x_1, \dots, x_N) \\
\vdots & & & \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x_N \partial x_1}(x_1, \dots, x_N) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_N \partial x_2}(x_1, \dots, x_N) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_N \partial x_N}(x_1, \dots, x_N)
\end{pmatrix} = \text{Hess}\ (f(x_1, \dots, x_N)) = \nabla^2 f(x_1, \dots, x_N)$$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_1, \dots, x_N)$ steht in Zeile i und Spalte j der Matrix $\nabla^2 f(x_1, \dots, x_N)$.

Die obige Matrix heißt Hessematrix von f.
Der Raum aller Rechteckschemata (bzw. Matrizen) mit N-Zeilen und M-Spalten mit Einträgen aus $\mathbb{R}$ heißt $\mathbb{R}^{N \times M}$ bzw. $\mathbb{R}^{N,M}$.
Es gilt also $\nabla^2 f(x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^{N \times N}$
Sind alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(x_1, \dots, x_N)$ stetig auf D, so heißt f zweimal total differenzierbar auf D. Man schreibt: $D^2 f(x_1, \dots, x_N),\ f''(x_1, \dots, x_N),\ \nabla^2 f(x_1, \dots, x_N)$

Beispiel: $f(x_1,x_2) = x_1^2 x_2 + \ln(1+x_1^2),\ f: D \to \mathbb{R},\ D = \mathbb{R}^2$

Berechnung des Gradienten:

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2) &= 2x_1x_2 + \tfrac{1}{1+x_1^2}\cdot 2x_1 \\ \tfrac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2) &= x_1^2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \nabla f(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} 2x_1x_2 + \frac{1}{1+x_1^2}\cdot 2x_1 \\ x_1^2 \end{pmatrix}$$

Berechnung der Hesse-Matrix:

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1,x_2) &= 2x_2 + \tfrac{2(1+x_1^2)-2x_1\cdot 2x_1}{(1+x_1^2)^2} = 2x_2 + \tfrac{2-2x_1^2}{(1+x_1^2)^2} \\ \tfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1,x_2) &= 2x_1 \\ \tfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1,x_2) &= 2x_1 \\ \tfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_1,x_2) &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \nabla^2 f(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} 2x_2 + \frac{2-2x_1^2}{(1+x_1^2)^2} & 2x_1 \\ 2x_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Beobachtung: Es gilt $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1,x_2) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1,x_2)$. Dies ist allgemein richtig.

Satz von Schwarz:

Sei $f: D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}^N,\ f(x) = f(x_1,\dots,x_N)$ zweimal total differenzierbar (d.h. alle partiellen Ableitungen 2-ter Ordnung existieren und sind stetig). Dann gilt:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_1,\dots,x_N)\right) = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1,\dots,x_N)\right), \quad (x_1,\dots,x_N) \in D,\ j,k \in \{1,\dots,N\}.$$

4.3 Differentiale

4.3.1 Differentiale mit einer Variablen

Sei f eine Größe, welche von einer anderen Größe x abhängt. Mathematisch bedeutet das $f = f(x),\ x \in \mathbb{R}$. Ferner sei f differenzierbar. Dann gilt: $f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$
Schreibe dies formal um zu $df(x) = f'(x)\ dx$ "totales Differential von f bzgl. x"

Interpretation

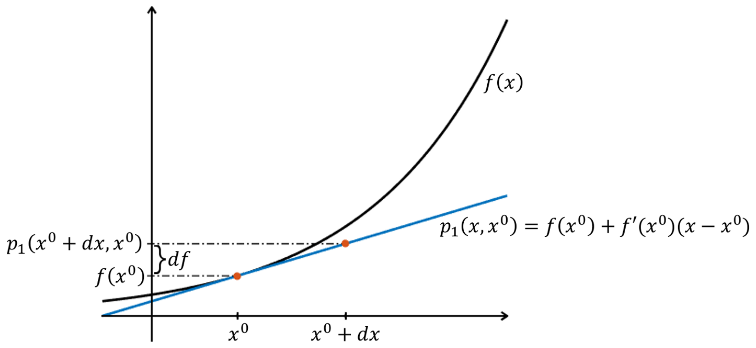
1-tes Taylorpolynom zu f in x^0

$p_1(x, x^0) = f(x^0) + f'(x^0)(x - x^0)$

$p_1(x^0 + dx, x^0) = f(x^0) + f'(x^0)(x^0 + dx - x^0)$

$= f(x^0) + f'(x^0)\ dx$

$$\Rightarrow \quad df(x^0) \begin{aligned}[t] &= f'(x^0)\ dx \\ &= p_1(x^0 + dx, x^0) - f(x_0) \end{aligned}$$



Verändert man ausgehend von x^0 die unabhängige Größe um dx, so verändert sich die abhängige Größe f ungefähr, d.h. in erster Näherung um $df(x^0)$.
Häufig findet man auch Relationen der Form $df = g(x)\ dx$ mit gegebener Funktion g. Gesucht ist dann f.
Dies schreibt man um zu $\frac{df(x)}{dx} = f'(x) = g(x)$, d.h. $\Rightarrow \quad f(x) = \int g(x)\ dx + c$, d.h f ist Stammfunktion zu g.

Beispiel: $dv = u^2\ du \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{du} = u^2 \quad \Rightarrow \quad v(u) = \frac{1}{3}u^3 + c$

4.3.2 Abhängigkeit von mehreren Größen

Sei f eine Größe, welche von N anderen Größen $x_1, \ldots, x_N$ abhängt, d.h. $f(x) = f(x_1, \ldots, x_N)$. Ferner sei f differenzierbar. Dann gilt

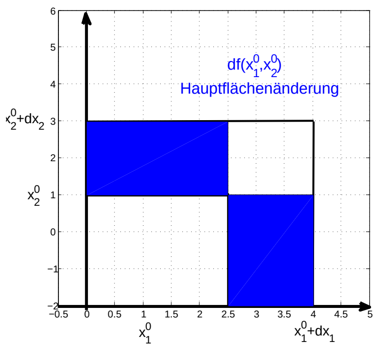
$$\frac{df(x)}{dx} = f'(x) = \nabla f(x) = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(x)}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_N} \right).$$

Man schreibt dies um zu $df(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial f(x)}{\partial x_N} dx_N = \sum\limits_{i=1}^{N} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} dx_i$

"totales Differential von f bzgl.x"

Interpretation: Verändert man ausgehend von $x = (x_1, \ldots, x_N)$ die unabhängige Größe $x = (x_1, \ldots, x_N)$ um $dx = (dx_1, \ldots, dx_N)$ zu $x + dx = (x_1 + dx_1, \ldots, x_N + dx_N)$, so verändert sich die abhängige Größe f in erster Näherung um $df(x) = df(x_1, \ldots, x_N)$.

Beispiel:



Flächeninhalt f eines Rechtecks mit der Seitenlänge x_1 und x_2. Die Fläche ist beschrieben durch $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$

Bei Änderung der Seitenlänge um $dx = (dx_1, dx_2)$ gilt:

$$df(x_1^0, x_2^0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^0, x_2^0)dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^0, x_2^0)dx_2 = x_2^0 dx_1 + x_1^0 dx_2$$

Für kleine dx_1, dx_2 entspricht das dem Hauptteil der Gesamtflächenänderung.

Beispiel (Cobb-Douglas-Funktion): $f(x_1, x_2) = A x_1^\alpha x_2^\beta, \qquad A > 0, \quad 0 < \alpha, \beta < 1$

$$df(x_1, x_2) = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2)}_{=A\alpha x_1^{\alpha-1} x_2^\beta} dx_1 + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2)}_{=A x_1^\alpha \beta x_2^{\beta-1}} dx_2 = (A\alpha x_1^{\alpha-1} x_2^\beta) dx_1 + (A x_1^\alpha \beta x_2^{\beta-1}) dx_2$$

"totales Differential der Cobb-Douglas-Funktion"

4.4 Nichtlineare Optimierung

4.4.1 Lokale Extrema von Funktionen

Es sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, $D \subset \mathbb{R}^N,\ f(x) = f(x_1, \ldots, x_N)$, zweimal total differenzierbar. Ferner sei $y = y(y_1, \ldots, y_N) \in D$

$$U_\varepsilon(y) = \{x \in D \mid |x_i - y_i| < \varepsilon,\ \ i = 1, \ldots, N\} \quad \text{"}\varepsilon - \text{Umgebung von y"}$$

Definition: $y = y(x_1, \ldots, y_N) \in D$ heißt relatives Maximum (Minimum) für $f : D \to \mathbb{R}$, falls

$$f(x) < f(y) \quad (f(x) > f(y)) \quad \text{für } \ x \in U_\varepsilon(y),\ x \neq y$$

gilt für $\varepsilon > 0$ hinreichend klein.

Charakterisierung von relativen Extrema y mit Hilfe der Ableitung

Bekannt: An einem solchen Punkt $y = (y_1, \ldots, y_N) \in D$ muss der Tangentialraum $T_y(f)$ horizontal sein. $T_y(f)$ hat die Darstellung

$$T_y(f) = \left\{ (x, v) = (x_1, \ldots, x_N, v) \mid v = f(y) + \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i}(y)(x_i - y_i) \right\}.$$

Horizontal heißt: v ist konstant, d.h. $\frac{\partial f}{\partial x_i}(y) = 0, \quad i = 1, \ldots, N$

Notwendige Bedingung für relatives Extremum

$$\nabla f(y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(y) = 0, \quad i = 1, \ldots, N$$

Ob dann ein relatives Minimum, ein relatives Maximum oder ein Sattelpunkt vorliegt, muss sich an der zweiten Ableitung, d.h. an der Hesse-Matrix $\nabla^2 f(y) \in \mathbb{R}^{N \times N}$ entscheiden.

Für allgemeines N können wir dieses Kriterium noch nicht verstehen, da uns einige Kenntnisse über Matrizen fehlen. Für $N = 2,\ x = (x_1, x_2)$ gilt:

Hinreichende Bedingungen für lokale Extrema

$y = (y_1, y_2) \in D \subset \mathbb{R}^2$ ist rel. Maximum [Minimum] für $f = f(x_1, x_2)$, falls

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(y_1, y_2) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(y_1, y_2) = 0$$

und

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(y_1, y_2) < 0 \ \ [> 0]$$

sowie

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(y_1, y_2) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(y_1, y_2) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(y_1, y_2) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(y_1, y_2) > 0 \quad [> 0]$$

Bemerkung: Der Term

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(y_1, y_2) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(y_1, y_2) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(y_1, y_2) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(y_1, y_2) = \det(\nabla^2 f(y_1, y_2))$$

ist auch als Determinante $\det(\nabla^2 f(y_1, y_2))$ der Hesse-Matrix $\nabla^2 f(y_1, y_2)$ bekannt. Ist diese Determinante kleiner Null, so liegt ein Sattelpunkt vor.

Beispiel 1: Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2$
Bestimme die lokalen Minima und Maxima von f.

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 2x_1 - x_2, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = -x_1 + 2x_2$$

Nullstellen des Gradienten von $\nabla f(x_1, x_2)$:

$$\begin{aligned} 0 &= 3x_1^2 + 2x_1 - x_2 \\ 0 &= -x_1 + 2x_2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad x_1 = 2x_2, \quad x_2 = \tfrac{1}{2}x_1$$

Einsetzen in 1. Gleichung: $3x_1^2 + 2x_1 - x_2 = 3x_1^2 + 2x_1 - \frac{1}{2}x_1 = x_1(3x_1 + \frac{3}{2}) = 0$

$\Rightarrow \quad x_1 = 0, \quad 3x_1 + \frac{3}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -\frac{1}{2}$
$\Rightarrow \quad x_2 = 0, \quad x_2 = -\frac{1}{4}$
$\Rightarrow \quad \bar{x} = (0,0)$ und $\hat{x} = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ sind mögliche relative Extrema.

Überprüfung der hinreichenden Bedingungen:

$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1, x_2) = \frac{\partial}{\partial x_1}(3x_1^2 + 2x_1 - x_2) = 6x_1 + 2$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2) = -1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1, x_2) \qquad$ (Satz von Schwarz)

$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_1, x_2) = 2$

$$\Rightarrow \nabla^2 f(\bar{x}) = \nabla^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \nabla^2 f(\hat{x}) = \nabla^2 f\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Für $\bar{x} = (0,0)$ gilt

$$\det(\nabla^2 f(0,0)) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(0,0) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(0,0) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(0,0) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(0,0) = 2 \cdot 2 - (-1)^2 = 3 > 0$$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(0,0) = 2 > 0 \qquad \Rightarrow \quad \bar{x} = (0,0)$ ist lokales Minimum von f.

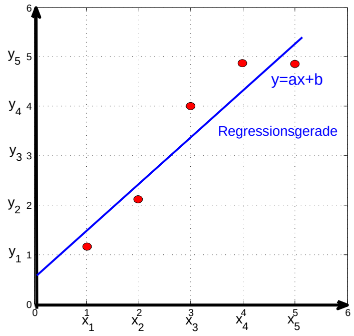
Für $\hat{x} = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$ finden wir

$$\det\left(\nabla^2 f\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)\right)^2 = (-1) \cdot 2 - (-1)^2 = -3 < 0.$$

Also ist $\hat{x} = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ ein Sattelpunkt von f.

Beispiel 2: Die Regressionsgerade

Es seien Messdaten (x_j, y_j), $\quad j = 1, \ldots, m$ gegeben.



Gesucht ist eine Gerade $y = ax + b$ mit Steigung a und Achsenabschnitt b, welche die Daten (x_j, y_j), $\quad j = 1, \ldots, m$ so gut wie möglich approximiert.

Ideal wäre: $y_j = ax_j + b$, $\quad j = 1, \ldots, m$.
Dies ist im allgemeinen nicht zu erwarten.

Bilde den Vektor der Differenzen $\quad w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 - ax_1 - b \\ \vdots \\ y_m - ax_m - b \end{pmatrix}$

Idee: Versuche die Euklidnorm $||w||_2$ bzw. besser $||w||_2^2 = \sum\limits_{j=1}^{m} w_j^2$ möglichst klein zu machen.

Setze $f(a, b) = \frac{1}{2} \sum\limits_{j=1}^{m} w_j^2 = \frac{1}{2} \sum\limits_{j=1}^{m} (y_j - ax_j - b)^2$ und suche $\bar{a}$ und $\bar{b}$ derart, dass f dort ein lokales Minimum hat. Die notwendigen Bedingungen für ein lokales Minimum lauten
$\frac{\partial f}{\partial a}(\bar{a}, \bar{b}) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial b}(\bar{a}, \bar{b}) = 0.$

Berechne die partiellen Ableitungen und finde

$$\frac{\partial f}{\partial a}(a, b) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{m} 2(y_j - ax_j - b)(-x_j) = \sum_{j=1}^{m} -x_j y_j + \left(\sum_{j=1}^{m} x_j^2 \right) a + \left(\sum_{j=1}^{m} x_j \right) b \stackrel{!}{=} 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial b}(a, b) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{m} 2(y_j - ax_j - b)(-1) = \sum_{j=1}^{m} -y_j + \left(\sum_{j=1}^{m} x_j \right) a + b \sum_{j=1}^{m} 1 = -\sum_{j=1}^{m} y_j + \left(\sum_{j=1}^{m} x_j \right) a + bm \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{j=1}^{m} x_j y_j = \left(\sum_{j=1}^{m} x_j^2 \right) a + \left(\sum_{j=1}^{m} x_j \right) b, \qquad \sum_{j=1}^{m} y_j = \left(\sum_{j=1}^{m} x_j \right) a + bm.$$

Ausrechnen der Lösung liefert: $\bar{a} = \dfrac{\left(\sum\limits_{j=1}^{m} x_j y_j \right) m - \sum\limits_{j=1}^{m} y_j \cdot \sum\limits_{j=1}^{m} x_j}{D}, \qquad \bar{b} = \dfrac{\left(\sum\limits_{j=1}^{m} y_j \cdot \sum\limits_{j=1}^{m} x_j^2 - \sum\limits_{j=1}^{m} x_j y_j \cdot \sum\limits_{j=1}^{m} x_j \right)}{D}$

mit $D = m \cdot \sum\limits_{j=1}^{m} x_j^2 - \left(\sum\limits_{j=1}^{m} x_j \right)^2$

$\bar{a}$ optimale Steigung
$\bar{b}$ optimaler Achsenabschnitt der Regressionsgerade

Dabei lässt sich zeigen: $D > 0$, falls $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$, $\quad i, j \in \{1, \ldots, m\}$
Ferner kann man zeigen, dass $(\bar{a}, \bar{b})$ ein lokales Minimum ist.

4.4.2 Taylorpolynom 1-Ordnung in N Variablen

Sei $f : D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}^N$ differenzierbar. Es sei $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_N^0) \in D$

Bekannt: $T_{x^0}(f) = \{(x_1, \ldots, x_N, v) |\ v = \underbrace{f(x^0) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0)(x_1 - x_1^0) + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_N}(x^0)(x_N - x_N^0)}_{q(x)}\}$

$q(x)$ ist ein Polynom 1-ten Grades in $x = (x_1, \ldots, x_N)$. Es erfüllt

$$\begin{aligned}
&q(x^0) = f(x^0)\\
&\tfrac{\partial q}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_N) = \tfrac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^0, \ldots, x_N^0), \qquad i = 1, \ldots, N\\
&\tfrac{\partial q}{\partial x_i}(x^0) = \tfrac{\partial f}{\partial x_i}(x^0), \qquad i = 1, \ldots, N
\end{aligned}$$

Für q und f stimmen bei x^0 der Funktionswert, und alle partiellen Ableitungen 1-ter Ordnung überein. $q(x)$ ist somit das Taylorpolynom $p_1(x, x^0)$ erster Ordnung zu f bei x^0 in N-Variablen, d.h.

$$p_1(x, x^0) = f(x^0) + \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0)(x_i - x_i^0).$$

Beispiel: $f(x_1, x_2) = \exp(x_1 + x_2) - 2x_1x_2^3$ differenzierbar, $x^0 = (-1, 1)$ Entwicklungspunkt.

Berechnung von $p_1(x, x^0)$: $f(-1, 1) = \exp(0) - 2(-1) \cdot 1^3 = 1 + 2 = 3$

$$\begin{aligned}
&\tfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = \exp(x_1 + x_2) - 2x_2^3 && \tfrac{\partial f}{\partial x_1}(-1, 1) = \exp(0) - 2 = -1\\
&\tfrac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = \exp(x_1 + x_2) - 6x_1x_2^2 && \tfrac{\partial f}{\partial x_2}(-1, 1) = \exp(0) - 6(-1) \cdot 1^2 = 7
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad p_1((x_1, x_2), (-1, 1)) = 3 - (x_1 - (-1)) + 7(x_2 - 1) = 3 - (x_1 + 1) + 7(x_2 - 1).$$

Zusammenhang mit dem totalen Differential:

Es sei $dx = (dx_1, \ldots, dx_N)$. Berechne

$$\begin{aligned}
p_1(x^0 + dx, x^0) &= f(x^0) + \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0)(x_i^0 + dx_i - x_i^0)\\
&= f(x^0) + \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0)\, dx_i \;=\; f(x^0) + df(x^0).
\end{aligned}$$

Also folgt

$$df(x^0) \;=\; p_1(x^0 + dx, x^0) - f(x^0),$$

d.h. verändert man ausgehend von x^0 die unabhängige Größe um dx, so ändert sich die abhängige Größe in 1-ter Näherung um $df(x^0)$.

4.4.3 Lokale Extrema unter Nebenbedingungen

Seien $f : D \to \mathbb{R},\ g : D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}^N$ differenzierbare Funktionen.

Problem: Maximiere / Minimiere $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n),\ x \in D$ unter der Nebenbedingung $g(x) = g(x_1, \ldots, x_N) = 0$.

Setze $Z = \{x \in D |\ g(x) = 0\}$ "Menge der zulässigen Punkte"

Die Punkte $x \in Z$ erfüllen die Nebenbedingen $g(x) = 0$ nach Definition. Gesucht ist also ein Maximum / Minimum von f auf der Menge Z der zulässigen Punkte.

Beispiel (Produktionsvolumen):

Für die Herstellung eines bestimmten Artikels des Produktionsvolumens f sind die Kosten per Einheit proportional zur aufgewendeten Arbeit x_1, zur Menge des verwendeten Materials x_2 und zu den Betriebskosten x_3 der Maschinen.

$f \sim x_1x_2x_3$, d.h. $f(x_1, x_2, x_3) = Kx_1x_2x_3, \quad D = \{(x_1, x_2, x_3)|\ x_i > 0,\ i = 1, 2, 3\}$

Die Kosten für Arbeitseinheit, Material und Maschinenbetrieb stehen im Verhältnis 3:2:1 und sind monatlich auf die Summe $s = 3000$ festgelegt, d.h. es gilt: $g(x_1, x_2, x_3) = 3000 - 3x_1 - 2x_2 - 1x_3 = 0$

Gesucht ist ein lokales Maximum des Produktionsvolumens f in

$Z = \{(x_1, x_2, x_3) \in D|\ 3000 - 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 0\}$

bzw. ein lokales Maximum von f unter der Nebenbedingung $g(x) = g(x_1, x_2, x_3) = 0$.

Lösung des Problems durch Elimination einer Variablen:

Löse $g(x_1, x_2, x_3) = 0$ nach x_3 auf und finde $x_3 = 3000 - 3x_1 - 2x_2 = \varphi(x_1, x_2)$.
Setze dann $h(x_1, x_2) = f(x_1, x_2, \varphi(x_1, x_2)) = Kx_1x_2 \cdot \underbrace{(3000 - 3x_1 - 2x_2)}_{x_3}$ und suche ein lokales Maximum (x_1, x_2), $x_1, x_2 > 0$ für h. Ist $x_3 = \varphi(x_1, x_2) > 0$, so ist dies eine Lösung des Ausgangsproblems. Notwendig hierfür ist $0 = \frac{\partial h}{\partial x_i}(x_1, x_2),\ \ i = 1, 2.$

$$\frac{\partial h}{\partial x_1}(x_1, x_2) = Kx_2(3000 - 3x_1 - 2x_2) + Kx_1x_2(-3) = Kx_2(3000 - 3x_1 - 2x_2 - 3x_1) = Kx_2(3000 - 6x_1 - 2x_2) \overset{!}{=} 0$$

$$\frac{\partial h}{\partial x_2}(x_1, x_2) = Kx_1(3000 - 3x_1 - 2x_2) + Kx_1x_2(-2) = Kx_1(3000 - 3x_1 - 2x_2 - 2x_2) = Kx_1(3000 - 3x_1 - 4x_2) \overset{!}{=} 0$$

Wegen $x_1, x_2 > 0$ folgt:

$$\begin{array}{l} 3000 - 6x_1 - 2x_2 = 0 \\ 3000 - 3x_1 - 4x_2 = 0 \quad |(-2) \Rightarrow \quad -6000 + 6x_1 + 8x_2 = 0 \\ \hline \Rightarrow \quad -3000 + 6x_2 = 0 \\ \Rightarrow \quad x_2 = 500, \quad x_1 = \frac{1000}{3} \end{array}$$

Ferner gilt

$$x_3 = \varphi(x_1, x_2) = \varphi\left(\frac{1000}{3}, 500\right) = 3000 - 3 \cdot \frac{1000}{3} - 2 \cdot 500 = 1000 > 0.$$

Erhalte die Lösung $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) = \left(\frac{1000}{3}, 5000, 1000\right)$.

Wert der Zielfunktion $f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) = K \cdot \frac{1000}{3} \cdot 500 \cdot 1000 = \frac{5}{3}K \cdot 10^8$

Es lässt sich zeigen, dass $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ tatsächlich ein lokales Maximum von f unter der Nebenbedingung $g = 0$ ist.

4.4.4 Der Ansatz von Lagrange

Herleitung: In Anlehnung an das Beispiel aus 4.4.3 betrachten wir die folgende Situation.

Es seien $f(x) = f(x_1x_2, x_3)$, $g(x) = g(x_1, x_2, x_3)$, $f, g : D \to \mathbb{R}$ gegeben mit $g(x_1, x_2, x_3) = 0$ genau dann, wenn $x_3 = \varphi(x_1, x_2)$ analog zu unserem Beispiel.

Betrachte $h(x_1, x_2) = f(x_1, x_2, \varphi(x_1, x_2)) \overset{!}{=}$ Max. $\qquad$ mit $g(x_1, x_2, \varphi(x_1, x_2)) = 0$

Notwendig für ein lokales Extremum:

$$0 = \frac{\partial h}{\partial x_1}(x_1,x_2) = \frac{\partial}{\partial x_1}(f(x_1,x_2,\varphi(x_1,x_2))) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2,\varphi(x_1,x_2)) + \frac{\partial f}{\partial x_3}(x_1,x_2,\varphi(x_1,x_2)) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x_1,x_2)$$
$$0 = \frac{\partial h}{\partial x_2}(x_1,x_2) = \frac{\partial}{\partial x_2}(f(x_1,x_2,\varphi(x_1,x_2))) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2,\varphi(x_1,x_2)) + \frac{\partial f}{\partial x_3}(x_1,x_2,\varphi(x_1,x_2)) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(x_1,x_2)$$

Möchte die Terme $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x_1,x_2),\ \ i=1,2$ durch f und g ausdrücken.

Differenziere dazu $g(x_1,x_2,\varphi(x_1,x_2)) = 0$ nach x_i, $i=1,2$, finde

$\frac{\partial g}{\partial x_i}(x_1,x_2,\varphi(x_1,x_2)) + \frac{\partial g}{\partial x_3}(x_1,x_2,\varphi(x_1,x_2)) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x_1,x_2) = 0, \quad i=1,2,$

und löse dies nach $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i},\ \ i=1,2$ auf

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x_1,x_2) = \frac{-\frac{\partial g}{\partial x_i}(x_1,x_2,\varphi(x_1,x_2))}{\frac{\partial g}{\partial x_3}(x_1,x_2,\varphi(x_1,x_2))}, \qquad i=1,2.$$

Einsetzen in obige Gleichungen liefert

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2,\varphi(x_1,x_2)) + \frac{\partial f}{\partial x_3}(x_1,x_2,\varphi(x_1,x_2)) \cdot \frac{-\frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1,x_2,\varphi(x_1,x_2))}{\frac{\partial g}{\partial x_3}(x_1,x_2,\varphi(x_1,x_2))} = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2,\varphi(x_1,x_2)) + \frac{\partial f}{\partial x_3}(x_1,x_2,\varphi(x_1,x_2)) \cdot \frac{-\frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1,x_2,\varphi(x_1,x_2))}{\frac{\partial g}{\partial x_3}(x_1,x_2,\varphi(x_1,x_2))} = 0$$

Setze $\lambda = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x_3}(x_1,x_2,\varphi(x_1,x_2))}{\frac{\partial g}{\partial x_3}(x_1,x_2,\varphi(x_1,x_2))} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{\partial f}{\partial x_3}(x_1,x_2,\varphi(x_1,x_2)) + \lambda\frac{\partial g}{\partial x_3}(x_1,x_2,\varphi(x_1,x_2)) = 0.$

Dann erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2,\varphi(x_1,x_2)) + \lambda\frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1,x_2,\varphi(x_1,x_2)) = 0\\
&\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2,\varphi(x_1,x_2)) + \lambda\frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1,x_2,\varphi(x_1,x_2)) = 0\\
&g(x_1,x_2,\varphi(x_1,x_2)) = 0
\end{aligned}$$

Setze x_3 wieder zurück, d.h. $x_3 = \varphi(x_1,x_2)$ und erhalte die Gleichungen

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1,x_2,x_3) + \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i}(x_1,x_2,x_3) = 0 \quad i=1,2,3, \qquad g(x_1,x_2,x_3) = 0. \qquad (*)$$

Dies sind 4 Gleichungen für 4 Unbekannte x_1,x_2,x_3,λ.

Lösungsmethode:

Definiere die Funktion

$$L(x_1,x_2,x_3,\lambda) = f(x_1,x_2,x_3) + \lambda g(x_1,x_2,x_3).$$

L heißt "Lagrange-Funktion" und λ "Lagrange-Multiplikator".
Dann ist unser Gleichungssystem $(*)$ äquivalent zu

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial L}{\partial x_i}(x_1,x_2,x_3,\lambda) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1,x_2,x_3) + \lambda\frac{\partial g}{\partial x_i}(x_1,x_2,x_3) \stackrel{!}{=} 0, \ \ i=1,2,3\\
&\frac{\partial L}{\partial \lambda}(x_1,x_2,x_3,\lambda) = g(x_1,x_2,x_3) \stackrel{!}{=} 0
\end{aligned}$$

d.h. $\nabla L(x_1,x_2,x_3,\lambda) = 0$.

Beachte: Dieser Ansatz benötigt keine auflösende Funktion φ. Lösungen von $\nabla L(x_1,x_2,x_3,\lambda) = 0.$ heißen stationäre Punkte der Lagrange-Funktion.

Beispiel (Produktionsvolumen): Setze die Lagrangefunktion

$$L(x_1,x_2,x_3,\lambda) = Kx_1x_2x_3 + \lambda(3000 - 3x_1 - 2x_2 - x_3), \qquad x_1,x_2,x_3 > 0, \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Die notwendigen Bedingungen lauten dann

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}(x_1,x_2,x_3,\lambda) = Kx_2x_3 + \lambda(-3) = Kx_2x_3 - 3\lambda \overset{!}{=} 0 \quad (1)$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_2}(x_1,x_2,x_3,\lambda) = Kx_1x_3 + \lambda(-2) = Kx_1x_3 - 2\lambda \overset{!}{=} 0 \quad (2)$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_3}(x_1,x_2,x_3,\lambda) = Kx_1x_2 + \lambda(-1) = Kx_1x_2 - \lambda \overset{!}{=} 0 \quad (3)$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}(x_1,x_2,x_3,\lambda) = 3000 - 3x_1 - 2x_2 - x_3 \overset{!}{=} 0 \quad (4)$$

Zur Lösung des Gleichungssystems (1)-(4) ist Intuition gefragt, da jedes Beispiel ein bisschen anders ist.

Finde $\lambda = Kx_1x_2$ aus (3) und $x_3 = 3000 - 3x_1 - 2x_2$ aus (4).
Einsetzen in (1),(2) liefert:

$$Kx_2(3000 - 3x_1 - 2x_2) - 3Kx_1x_2 = 0 \quad | : Kx_2 \& \quad Kx_1(3000 - 3x_1 - 2x_2) - 2Kx_1x_2 = 0 \quad | : Kx_1$$
$$3000 - 3x_1 - 2x_2 - 3x_1 \qquad 3000 - 3x_1 - 2x_2 - 2x_2$$
$$= 3000 - 6x_1 - 2x_2 = 0 \qquad = 3000 - 3x_1 - 4x_2 = 0 \quad (5)$$

Löse (5) und finde: $\bar{x}_1 = \frac{1000}{3}$, $\bar{x}_2 = 500$ ”stationäre Punkte der Lagrange-Funktion”

$\Rightarrow \quad \bar{x}_3 = 3000 - 3 \cdot \frac{1000}{3} - 2 \cdot 500 = 1000, \qquad \bar{\lambda} = K\bar{x}_1\bar{x}_2 = K\frac{1000}{3} \cdot 500 = \frac{5}{3}K \cdot 10^5.$

$(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ und $\bar{\lambda}$ sind stationäre Punkte der Lagrange-Funktion, d.h. erfüllen die notwendigen Bedingungen für ein lokales Extremum unter der Nebenbedingung. Weitere Untersuchungen sind nötig, um festzustellen, ob tatsächlich ein lokales Maximum unter Nebenbedingung vorliegt.

Der allgemeine Fall von N-Variablen

Problem: Gegeben seien $f : D \to \mathbb{R}$, $g : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^N$ differenzierbar

Gesucht: $f(x) = f(x_1, \ldots, x_N) \overset{!}{=}$ Min / Max
unter der Nebenbedingung $g(x) = g(x_1, \ldots, x_N) = 0$

Lösung mit dem Ansatz von Lagrange: Setze hier die Lagrange-Funktion

$L(x_1, \ldots, x_N, \lambda) := f(x_1, \ldots, x_N) + \lambda g(x_1, \ldots, x_N), \qquad (x_1, \ldots, x_N) \in D, \ \lambda \in \mathbb{R}$

Notwendige Bedingungen für lokale Extrema unter einer Nebenbedingung

$$\frac{\partial L}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_N, \lambda) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_N) + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_N) = 0 \qquad i = 1, \ldots, N$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}(x_1, \ldots, x_N, \lambda) = g(x_1, \ldots, x_N) = 0$$

Dies sind $(N+1)$-Gleichungen für $(N+1)$-Unbekannte $x_1, \ldots, x_N$ und λ. Die Lösungen dieses Systems sind wieder stationäre Punkte der Lagrange-Funktion L.

Beispiel:

$f(x_1, \ldots, x_N) = x_1x_2 \cdot \ldots \cdot x_N \overset{!}{=}$ Max (Zielfunktion) $\quad D = \{x \in \mathbb{R}^N | \ x_i > 0, \ i = 1, \ldots, N\}$

$g(x_1, \ldots, x_N) = \sum_{i=1}^{N} x_i^2 - 1 = ||x||_2^2 - 1 = 0$ (Nebenbedingung)

Die Nebenbedingung $g(x_1, \ldots, x_N)$ beschreibt die Oberfläche der Kugel mit Radius 1 um den Ursprung. Gesucht ist also ein Maximum von f auf dem positiven Oktanden der Kugeloberfläche.

Lagrange-Funktion: $L(x_1, \ldots, x_N, \lambda) = x_1 \cdot \ldots \cdot x_N + \lambda \left(\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - 1 \right) \qquad x_i > 0, \ i = 1, \ldots, N, \ \lambda \in \mathbb{R}$

Die notwendige Bedingungen lauten

$$
\begin{array}{ll}
\frac{\partial L}{\partial x_1}(x_1,\dots,x_N,\lambda) = x_2x_3\cdot\ldots\cdot x_N + \lambda 2x_1 \overset{!}{=} 0 & (1)\\
\frac{\partial L}{\partial x_2}(x_1,\dots,x_N,\lambda) = x_1x_3\cdot\ldots\cdot x_N + \lambda 2x_2 \overset{!}{=} 0 & (2)\\
\vdots & \vdots\\
\frac{\partial L}{\partial x_N}(x_1,\dots,x_N,\lambda) = x_1x_2\cdot\ldots\cdot x_{N-1} + \lambda 2x_N \overset{!}{=} 0 & (N)\\
\frac{\partial L}{\partial \lambda}(x_1,\dots,x_N,\lambda) = \sum_{i=1}^{N} x_i^2 - 1 \overset{!}{=} 0 & (N+1)
\end{array}
$$

Multipliziere die Gleichung (i) mit x_i für $i = 1,\dots,N$

$$
\begin{array}{ll}
x_1x_2\cdot\ldots\cdot x_n + \lambda\cdot 2x_1^2 = 0 & (1')\\
x_1x_2\cdot\ldots\cdot x_n + \lambda\cdot 2x_2^2 = 0 & (2')\\
\vdots & \vdots\\
x_1x_2\cdot\ldots\cdot x_n + \lambda\cdot 2x_N^2 = 0 & (N')
\end{array}
$$

Addiere (1')-(N'): $N(x_1x_2\cdot\ldots\cdot x_N) + 2\lambda \underbrace{\sum_{i=1}^{N} x_i^2}_{=1} = 0$

$\Rightarrow \quad Nx_1x_2\cdot\ldots\cdot x_N + 2\lambda = 0 \qquad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{-N}{2}\cdot x_1\cdot\ldots\cdot x_N.$

Setze in (1') ein: $x_1\cdot\ldots\cdot x_N + 2\lambda x_1^2 = x_1\cdot\ldots\cdot x_N + 2\left(\frac{-N}{2}\right)x_1\cdot\ldots\cdot x_N\cdot x_1^2 = \underbrace{x_1\cdot\ldots\cdot x_N}_{>0}(1-Nx_1^2) = 0$

$\Rightarrow \quad 1 - Nx_1^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{N} = x_1^2 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = \frac{1}{\sqrt{N}} > 0$

Beachte: $\bar{x}_1 = \frac{-1}{\sqrt{N}} < 0$ ist nicht zulässig !

Für die Variablen $x_2,\dots,x_N$ folgt analog: $(1 - Nx_i^2) = 0 \quad \Rightarrow x_i = \frac{1}{\sqrt{N}}, \quad i = 2,\dots,N.$

Für den Lagrange-Multiplikator λ findet man

$\lambda = \frac{-N}{2}x_1\cdot\ldots\cdot x_N = \frac{-N}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)^N = \frac{-N}{2}N^{-\frac{N}{2}} = \frac{-1}{2}N^{\frac{-N}{2}+1}$

$\Rightarrow$ Lösung: $\bar{x} = (\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_N) = \left(\frac{1}{\sqrt{N}},\dots,\frac{1}{\sqrt{N}}\right), \qquad \bar{\lambda} = -\frac{1}{2}N^{-\frac{N}{2}+1}.$

Die Funktion $f(x) = x_1\cdot\ldots\cdot x_N$ nimmt auf der Kugeloberfläche an der Stelle $\bar{x} = \left(\frac{1}{\sqrt{N}},\dots,\frac{1}{\sqrt{N}}\right)$ ein lokales Extremum an.

Ausblick: Mehrere Nebenbedingungen

Im allgemeinen ist die Anzahl der Nebenbedingungen nicht auf eine limitiert. Viele Probleme in den Wirtschafts- und Naturwissenschaften werden Optimierungsaufgaben mit mehreren Nebenbedingungen beschrieben.

Problem: Gegeben seien $f: D \to \mathbb{R}$, $g_i: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^N$, $i = 1,\dots,l$, $l < N$ differenzierbar

Gesucht: $f(x) = f(x_1,\dots,x_N) \overset{!}{=}$ Min / Max
unter den Nebenbedingungen $g_i(x) = g_i(x_1,\dots,x_N) = 0$, $i = 1,\dots,l$.

Setze hier $Z = \{x \in D \mid g_i(x) = 0,\ i = 1,\dots,l\}$ "Menge der zulässigen Punkte"

Die Punkte $x \in Z$ erfüllen die Nebenbedingen $g_i(x) = 0$, $i = 1,\dots,l$ nach Definition. Gesucht ist also wieder ein Maximum / Minimum von f auf der Menge Z der zulässigen Punkte.

Der Ansatz von Lagrange ist auch auf diesen Fall erweiterbar. Man modifiziert hier die Lagrangefunktion zu

$$\begin{aligned} L(x_1,\ldots,x_N,\lambda_1,\ldots\lambda_l) &= f(x_1,\ldots,x_N)+\lambda_1 g_1(x_1,\ldots,x_N)+\ldots+\lambda_l g_l(x_1,\ldots,x_N) \\ &= f(x_1,\ldots,x_N)+\sum_{i=1}^{l}\lambda_i g_i(x_1,\ldots,x_N). \end{aligned}$$

Die notwendigen Bedingungen für ein lokales Extremum von f unter den Nebenbedingungen $g_i(x)=0$, $i=1,\ldots,l$ lauten:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i}(x_1,\ldots,x_N,\lambda_1,\ldots,\lambda_l)=0, \qquad i=1,\ldots,N, \qquad \frac{\partial L}{\partial \lambda_j}(x_1,\ldots,x_N,\lambda_1,\ldots,\lambda_l)=0, \qquad j=1,\ldots,l.$$

Dies sind (N+l)-Gleichungen für (N+l)-Unbekannte.

Bemerkung: Im Fall mehrerer Nebenbedingungen muss auf die explizite Struktur der Nebenbedingungen geachtet werden.

Beispiel 1: Sei

$$\begin{aligned} g_1(x_1,x_2,x_3) &= x_1-2x_2-(1/2)x_3 \;=\; 0, \\ g_2(x_1,x_2,x_3) &= -6x_1+12x_2+3x_3 \;=\; 0. \end{aligned}$$

In diesem Fall gilt $-6g_1(x_1,x_2,x_3)=g_2(x_1,x_2,x_3)$, d.h. ist $g_1(x_1,x_2,x_3)=0$ erfüllt, so ist automatisch auch $g_2(x_1,x_2,x_3)=0$. Also hat man nur eine echte Nebenbedingung.

Beispiel 2: Sei

$$\begin{aligned} g_1(x_1,x_2,x_3) &= x_1-2x_2-(1/2)x_3 \;=\; 0, \\ g_2(x_1,x_2,x_3) &= -6x_1+12x_2+3x_3-1 \;=\; 0. \end{aligned}$$

Hier widersprechen sich die beiden Nebenbedingungen, denn aus $g_1(x_1,x_2,x_3)=0$ folgt direkt $g_2(x_1,x_2,x_3)=-6g_1(x_1,x_2,x_3)-1=-1\neq 0$. Somit folgt

$$Z \;=\; \{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 |\; g_1(x_1,x_2,x_3)=g_2(x_1,x_2,x_3)=0\} \;=\; \emptyset$$

und das Optimierungsproblem ist nicht korrekt gestellt.