Universität Konstanz *WS 24/25*
Fachbereich Mathematik und Statistik
J. Schropp

Übungen zu
Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler I

https://www.math.uni-konstanz.de/~schropp/wiwimath.html

11. Übungsblatt

Aufgabe 1

Vorgelegt sei die Funktion

$$g(x,y) = x^2 - xy + y^2 + 12x - 9y + 1, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Untersuchen Sie die Funktion auf lokale Minima und Maxima.

Aufgabe 2

Kann es zweimal stetig differenzierbare reellwertige Funktionen f bzw. g mit

$$\begin{aligned} \nabla f(x,y) &= (10xy - 3y^2, (1/2)x \exp(2y) + 5x^2y), \\ \nabla g(x,y) &= (\frac{2x^2}{x^2+y} + \ln(x^2+y), \frac{x}{x^2+y}) \end{aligned}$$

geben? Begründen Sie ihre Antwort.
Hinweis: Satz von Schwarz.

Aufgabe 3

Für eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^N$, $f(x) = f(x_1, \ldots, x_N)$ heißt

$$df(x_1, \ldots, x_N) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_N) dx_i$$

das totale Differential von f. $df(x)$ gibt in erster Näherung die Änderung von f an beim Übergang von $(x_1, \ldots, x_N)$ zu $(x_1 + dx_1, \ldots, x_N + dx_N)$. Berechnen Sie das totale Differential der Funktionen

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= ax_1^2 - b\sqrt{x_2}, \\ g(x_1, x_2, x_3) &= x_1^2 \ln(x_1 x_2 - x_3). \end{aligned}$$

Aufgabe 4

Zeigen Sie, dass die Höhenlinien zu Höhen $h > 0$ von

$$f(x,y) = x^2 - 4x + y^2 + 2y + 5$$

Kreise sind.

Aufgabe 5

Gegeben sei die Funktion

$$g(x, y) \;=\; 2x^2 - 10x - 3xy^2 + 5xy + y^3 + 5y - 1, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

a) Welche Punkte $(x, 2)$ liegen auf der Höhenlinie $g(x, y) = 7$?
b) Wie lautet die Tangente an die Höhenlinie in $(x, 2)$ zu den Punkten aus a)? Berechnen Sie überdies den Gradienten von g in diesen Punkten und verifizieren Sie, dass die Tangente und der Gradient senkrecht aufeinander stehen.