Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler II

Prof. Dr. Johannes Schropp,
Universität Konstanz

Typesetting S. Ringmann

16. April 2025

Inhaltsverzeichnis

5 Lineare Algebra **2**
5.1 Vektoren und Matrizen . . . 2
5.1.1 Beispiel Erdbebenhilfe: . . . 2
5.1.2 Matrixdarstellung linearer Gleichungssysteme . . . 3
5.1.3 Lineare Unabhängigkeit von Vektoren . . . 5
5.1.4 Rang einer Matrix . . . 7
5.2 Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme . . . 9
5.2.1 Erweiterte Koeffizientenmatrix . . . 9
5.2.2 Das Verfahren von Gauß . . . 10
5.2.3 Matrixgleichung und Inversenberechnung . . . 11
5.2.4 Das Gauß-Jordan Verfahren . . . 12
5.3 Determinanten . . . 13
5.3.1 Motivation . . . 13
5.3.2 Eigenschaften von Determinanten . . . 13
5.3.3 La Place Entwicklungen für Determinanten . . . 14
5.3.4 Spezielle Klassen von Matrizen . . . 15
5.3.5 Lösen von linearen Gleichungssystemen mit Determinanten . . . 16
5.3.6 Quadratische Formen . . . 16
5.3.7 Quadratische Formen auf Unterräumen bzw. mit Nebenbedingungen . . . 19
5.4 Eigenwerte und Eigenvektoren . . . 21
5.4.1 Definition und Eigenschaften . . . 21
5.4.2 Komplexe Zahlen . . . 23
5.4.3 Komplexe Eigenwerte . . . 25

Kapitel 5

Lineare Algebra

5.1 Vektoren und Matrizen

5.1.1 Beispiel Erdbebenhilfe:

Nach einem Beben in Zentralamerika soll ein Flugzeug mit Hilfsmitteln entsandt werden, wobei die Kapazitäten in Bezug auf den Laderaum, das Abfluggewicht und die zur Verfügung stehenden Geldmittel voll ausgeschöpft werden sollen.

	Volumen (l)	Gewicht (kg)	Kosten (€)
Blutkonserven	200	150	1000
Medikamente	300	100	300
Nahrungsmittel	80	60	400
Frischwasser	60	70	400
Kapazitäten	60000	40000	150000

Frage: Wieviele Container jeder Sorte sind zu verschicken, wenn über dies Frischwasser am dringendsten benötigt wird und deshalb doppelt so viele Wasserbehälter wie Container mit Blut und Medikamenten verschickt werden sollen?

Lösungsweg:

$$\begin{aligned} x_1 &= \text{Anzahl Behälter Blutkonserven} \\ x_2 &= \text{Anzahl Behälter Medikamente} \\ x_3 &= \text{Anzahl Behälter Nahrungsmittel} \\ x_4 &= \text{Anzahl Behälter Frischwasser} \end{aligned}$$

Nun gilt:

$$\begin{array}{lrl} \text{Restriktion Volumen:} & 200x_1 + 300x_2 + 80x_3 + 60x_4 = & 60000 \\ \text{Restriktion Gewicht:} & 150x_1 + 100x_2 + 60x_3 + 70x_4 = & 40000 \\ \text{Nebenbedingung (Restriktion Wasser):} & 2x_1 + 2x_2 - x_4 = & 0 \\ \text{Restriktion Kosten:} & 1000x_1 + 300x_2 + 400x_3 + 400x_4 = & 150000 \end{array}$$

"lineares Gleichungssystem von 4 Gleichungen in 4 Variablen"

5.1.2 Matrixdarstellung linearer Gleichungssysteme

Seien $a_{ij},\ b_i,\ i = 1, \ldots, M,\ j = 1, \ldots, N$ gegeben. Dann heißt

$$\begin{array}{lcl} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \ldots + a_{1N} \cdot x_N & = & b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \ldots + a_{2N} \cdot x_N & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{M1} \cdot x_1 + a_{M2} \cdot x_2 + \ldots + a_{MN} \cdot x_M & = & b_M \end{array} \qquad (*)$$

"lineares Gleichungssystem mit M-Gleichungen in N Unbekannten $x_1, x_2, \ldots, x_N$"

Gesucht sind Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_N$ derart, dass $(*)$ erfüllt ist.

Fragestellungen zu $(*)$:

- Existenz von Lösungen
- Eindeutigkeit von Lösungen
- Verfahren zur Bestimmung von Lösungen

Kompakte Schreibweise von $(*)$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{M1} & a_{M2} & \ldots & a_{MN} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{M,N}, \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_M \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^M, \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N$$

"A ist eine Matrix mit M Zeilen und N Spalten und Einträgen aus $\mathbb{R}$"

Das Problem $(*)$ ist gegeben durch $A \in \mathbb{R}^{M,N}$ und $b \in \mathbb{R}^M$

Gesucht ist $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N$ mit $(*)$.

Eine Matrix mit einer Zeile / Spalte nennt man auch einen Zeilen- / Spaltenvektor.

Bezeichnungen: $\mathbb{R}^{M,N}$ Menge aller Matrizen mit M Zeilen und N Spalten
$\mathbb{R}^M$ Menge aller Spaltenvektoren im $\mathbb{R}^M$, offenbar gilt: $\mathbb{R}^M = \mathbb{R}^{M,1}$

Elementare Rechenoperation für Matrizen:

Matrizen gleicher Größe können addiert und subtrahiert werden.
Seien $A = (a_{ij}),\ B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{M,N} \quad \Rightarrow \quad A + B = (a_{ij} + b_{ij}) \in \mathbb{R}^{M,N}$

Multiplikation mit Skalar $\lambda \in \mathbb{R}: \quad \lambda A = (\lambda a_{ij}) \in \mathbb{R}^{M,N}$

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,3}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,3}, \quad A + B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 6 & 6 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,3}$$

$$\lambda = 3, \quad 3 \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 12 & 15 & 18 \end{pmatrix}$$

Für die Matrizenaddition und die Multiplikation von Matrizen mit Skalaren gelten komponentenweise die Rechenregeln der reellen Zahlen.

Rechenregeln für Matrizen: Seien $A, B, C \in \mathbb{R}^{M,N}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \lambda(A+B) &= \lambda A + \lambda B && \text{(Distributivgesetz)} \\ A+B &= B+A && \text{(Kommutativgesetz)} \\ A+(B+C) &= (A+B)+C && \text{(Assoziativgesetz)} \end{aligned}$$

Diese Regeln folgen unmittelbar aus den entsprechenden Regeln für reelle Zahlen.

Für $\mathbb{R}^{M,1} = \mathbb{R}^M$ erhalten wir die Addition und Multiplikation mit Skalaren von Vektoren.

Man kann zueinander passende Matrizen auch multiplizieren.

Definition (Matrizenmultiplikation):

Seien $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{M,N}$ und $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{N,P}$, d.h. die Spaltenzahl von A stimmt mit der Zeilenzahl von B überein. Dann ist das Produkt von A und B die Matrix

$$C = A \cdot B = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{M,P} \quad \text{mit} \quad c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + a_{i3} \cdot b_{3j} + \ldots + a_{iN} \cdot b_{Nj} = \sum_{l=1}^{N} a_{il} \cdot b_{lj}, \quad i = 1, \ldots, M, \quad j = 1, \ldots, P$$

Bemerkung:

i) $A \cdot B$ ist nur definiert, falls die Spaltenzahl von A mit der Zeilenzahl von B übereinstimmt!

ii) Ist $A \cdot B$ definiert, so erhält man $(A \cdot B)_{ij}$ als Skalarprodukt der i-ten Zeile von A mit der j-ten Spalte von B.

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,2}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,4}$

Es gilt

$$A \cdot B \in \mathbb{R}^{3,4}, \qquad A \cdot B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,4} \qquad \text{"Skalarprodukt Zeile mal Spalte"}$$

Satz:

a) Das Matrizenprodukt ist assoziativ und distributiv, d.h. $A(B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$, $A(B+C) = A \cdot B + A \cdot C$, falls die Multiplikation möglich ist.

b) Das Matrizenprodukt ist im allgemeinen nicht kommutativ, d.h. $AB \neq BA$

Beispiel zu b):

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2} \qquad \text{dann gilt:} \quad AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2} \quad \text{"Nullmatrix"}$$

Bemerkung:

$$I_M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{M,M} \qquad \text{"Einheitsmatrix"}$$

Es gilt $I_M \cdot A = A \cdot I_M = A$ für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{M,M}$.

Gleichungssystem: $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{M,N}, \; x \in \mathbb{R}^N, \; b \in \mathbb{R}^M$

$$\begin{aligned} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \ldots + a_{1N} \cdot x_N &= b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \ldots + a_{2N} \cdot x_N &= b_2 \\ \vdots \quad & \quad \vdots \\ a_{M1} \cdot x_1 + a_{M2} \cdot x_2 + \ldots + a_{MN} \cdot x_N &= b_M \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{M1} & a_{M2} & \ldots & a_{MN} \end{pmatrix}, \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_M \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \quad (*) \text{ ist äquivalent zu } Ax = b$$

Problem: Gegeben: $A \in \mathbb{R}^{M,N}, \; b \in \mathbb{R}^M$
Gesucht ist ein $x \in \mathbb{R}^N$ so, dass $A \cdot x = b$

5.1.3 Lineare Unabhängigkeit von Vektoren

Beispiel: $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \; z = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \; w = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \; u, z, w \in \mathbb{R}^3$

$$u + z = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = w \qquad \Leftrightarrow \qquad u + z - w = 0$$

Man sagt: u, z, w sind linear abhängig, da sich w als Linearkombination von u und z darstellen lässt.

Definition (linear unabhängig):

Seien $v^1, v^2, \ldots, v^m \in \mathbb{R}^N$. Dann heißen $v^1, v^2, \ldots, v^m$ linear unabhängig, falls gilt:

$$\underbrace{\lambda_1 v^1 + \lambda_2 v^2 + \ldots + \lambda_m v^m}_{\text{Linearkombination von } v^1, \ldots, v^m} = 0, \quad \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_m = 0$$

Dies heißt, dass der Vektor $0 \in \mathbb{R}^N$ aus den Vektoren $v^1, v^2, \ldots, v^m$ nur durch $0 \cdot v^1 + 0 \cdot v^2 + \ldots + 0 \cdot v^m = 0$ erzeugt werden kann.

Beachte: u, z, w sind nicht linear unabhängig, d.h. linear abhängig, denn $1 \cdot u + 1 \cdot z - 1 \cdot w = 0$

Satz:

Vektoren $v^1, v^2, \ldots, v^m \in \mathbb{R}^N$ sind genau dann linear abhängig, falls es ein $i_0 \in \{1, \ldots, m\}$ und reelle Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_{i_0-1}, \lambda_{i_0+1}, \ldots, \lambda_m$ gibt mit

$$v^{i_0} = \lambda_1 v^1 + \ldots + \lambda_{i_0-1} v^{i_0-1} + \lambda_{i_0+1} v^{i_0+1} + \ldots + \lambda_m v^m$$

d.h. v^{i_0} lässt sich als Linearkombination der anderen Vektoren darstellen.

<u>Beispiel:</u> Vektor $e^i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow$ i-te Komponente

heißt i-ter Einheitsvektor bzw. i-ter kanonischer (normaler) Basisvektor.

<u>Es gilt:</u> Die Vektoren $e^1, e^2, \ldots, e^N \in \mathbb{R}^N$ sind linear unabhängig.

Setze an

$$0 = \lambda_1 e^1 + \lambda_2 e^2 + \ldots + \lambda_N e^N = \underbrace{\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{= \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}} + \underbrace{\lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{= \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}} + \ldots + \underbrace{\lambda_N \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{= \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda_N \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_N \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \lambda_i = 0,\ i = 1, \ldots, N.$$

Weiterhin gilt für jeden Vektor $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_N \end{pmatrix}$ die Darstellung: $w = w_1 e^1 + w_2 e^2 + \ldots + w_N e^N = \sum_{j=1}^{N} w_j e^j$

$\Rightarrow$ Jeder Vektor $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_N \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N$ kann eindeutig durch die e^i mit Gewicht w_i, $i = 1, \ldots, N$ linear kombiniert werden.

Ein Satz von N linear unabhängigen Vektoren im $\mathbb{R}^N$ mit dieser Eigenschaft heißt Basis.
$e^1, \ldots, e^N$ heißt kanonische Basis von $\mathbb{R}^N$.

5.1.4 Rang einer Matrix

Sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{M,N}$ eine reelle Matrix mit M Zeilen und N Spalten: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{M1} & \dots & a_{MN} \end{pmatrix}$

Dann können wir die Zeilen (bzw. die Spalten) von A als Zeilenvektoren im $\mathbb{R}^N$ (Spaltenvektoren im $\mathbb{R}^M$) auffassen.

Die Maximalzahl linear unabhängiger Zeilen (Spalten) von A heißt Zeilenrang (Spaltenrang) von A.

Bemerkung: Es gilt: Zeilenrang = Spaltenrang für jede Matrix A und man spricht Rang von A und schreibt: $rg(A)$

Beachte: $rg(A) \in \mathbb{N} \qquad 0 \leq rg(A) \leq \min(N, M)$

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 2 & 5 & -1 \\ \underbrace{3}_{=a^1} & \underbrace{6}_{=a^2} & \underbrace{0}_{=a^3} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}, \qquad rg(A) = ?$

Berechne: $2a^1 - a^2 = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = a^3$

d.h. a^1, a^2, a^3 sind linear abhängig $\quad \Rightarrow \quad rg(A) \leq 2$

Rechne nach: a^1, a^2 sind linear unabhängig $\quad \Rightarrow \quad rg(A) = 2$

$\Rightarrow$ Wir brauchen systematische Vorgehensweisen. Es fehlt aber bisher noch ein systematisches Vorgehen zur Bestimmung des Rangs von Matrizen.

Elementare Zeilenumformungen

Gegeben sei $A \in \mathbb{R}^{M,N}$: Folgende Operationen an A heißen elementare Zeilenumformungen.

i) Vertauschen der Zeile i mit der Zeile j.

ii) Ersetzen der Zeile i durch Zeile $i + \lambda \cdot$ Zeile j, $\lambda \in \mathbb{R}$, d.h. zur Zeile i wird das λ-fache der Zeile j hinzuaddiert.

iii) Multiplizieren der Zeile i mit einer Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$

Satz:

Elementare Zeilenumformungen verändern den Rang einer Matrix nicht.

Mittels elementarer Zeilenumformungen kann man eine Matrix in eine neue Matrix mit besonders "schöner" Form, der sogenannten Zeilenstufenform überführen.

Einer solchen Matrix sieht man den Rang sofort an:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad a_{11}, a_{23}, a_{34} \neq 0, \quad \text{A ist in Zeilenstufenform}$$

Dann gilt: Der Rang von A ist gleich der Anzahl der von Null verschiedenen Zeilenvektoren.

$\Rightarrow \quad rg(A) = 3$

Berechnung der Zeilenstufenform mittels elementaren Zeilenumformungen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -4 & 5 \\ 6 & -6 & 12 \end{pmatrix} \underbrace{\sim}_{\text{Vertausche die 1. und die 3. Zeile}} \begin{pmatrix} 6 & -6 & 12 \\ 3 & -4 & 5 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \underbrace{\sim}_{\lambda=-1/2\text{, addiere } \lambda\cdot \text{ 1. und 2. Zeile}}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & -6 & 12 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \underbrace{\sim}_{\lambda=2\text{, addiere } \lambda\cdot \text{ 2. und 3. Zeile}} \begin{pmatrix} 6 & -6 & 12 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \underbrace{\sim}_{\text{Zeilenstufenform erreicht}} \quad \Rightarrow \quad rg(A) = 3$$

Definition:

Eine quadratische Matrix $A \in \mathbb{R}^{N,N}$ heißt regulär, wenn rg(A)=N ist.

Es gibt dann die inverse Matrix $A^{-1} \in \mathbb{R}^{N,N}$.
Diese ist eindeutig charakterisiert durch: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_N$

Satz: Sei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}$.

Ist $D = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12} \neq 0$ so ist A regulär, d.h. invertierbar und es gilt:

$A^{-1} = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$

Beweis: Man rechne nach, dass $A \cdot A^{-1} = I_2$ gilt.

5.2 Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme

5.2.1 Erweiterte Koeffizientenmatrix

Vorgelegt sei

$$\begin{array}{lcl} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \ldots + a_{1N} \cdot x_N & = & b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \ldots + a_{2N} \cdot x_N & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{M1} \cdot x_1 + a_{M2} \cdot x_2 + \ldots + a_{MN} \cdot x_N & = & b_M \end{array} \qquad (*)$$

" M Gleichungen in N Unbekannten"

Kompakte Schreibweise:

$$\begin{array}{llll} A = (a_{ij}) & i = 1, \ldots, M & j = 1, \ldots, N & A \in \mathbb{R}^{M,N} \\ b = (b_i) & i = 1, \ldots, M & & b \in \mathbb{R}^M \\ x = (x_j) & j = 1, \ldots, N & & x \in \mathbb{R}^N \end{array}$$

Dann schreibt sich $(*)$ zu $A \cdot x = b$

Das Gleichungssystem $Ax = b$ heißt homogen, falls b = 0 (Nullvektor), sonst heißt es inhomogen.

Zu einem linearen Gleichungssystem $Ax = b$ heißt $(A|b) \in \mathbb{R}^{M,N+1}$

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1N} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2N} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{M1} & a_{M2} & \ldots & a_{MN} & b_M \end{array}\right) \in \mathbb{R}^{M,N+1}$$

die erweiterte Koeffizientenmatrix.

An der erweiterten Koeffizientenmatrix lässt sich das Lösungsverhalten des Systems $Ax = b$ entscheiden.

Satz:

Vorgelegt sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit $A \in \mathbb{R}^{M,N}$, $x \in \mathbb{R}^N$, $b \in \mathbb{R}^M$

a) $Ax = b$ besitzt genau dann eine Lösung, wenn gilt: $rg(A) = rg(A|b)$

b) Die Lösung, falls eine existiert, von $Ax = b$ ist genau dann eindeutig, wenn
$rg(A) = N$ =Anzahl der Unbekannten.
(Im Fall $M = N$ ist dies äquivalent zu A invertierbar)

Satz:

Elementare Zeilenumformungen an der erweiterten Koeffizientenmatrix $(A|b)$ verändern den Lösungsraum von $Ax = b$ nicht.

Bemerkung: Elementare Zeilenumformungen an $(A|b)$ ändern die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems nicht.

5.2.2 Das Verfahren von Gauß

Ziel: Bringe zuerst die erweiterte Koeffizientenmatrix auf Zeilenstufenform und lese dann die Lösung ab.

Addiere (im ersten Schritt) das λ-fache der ersten Zeile zu der i-ten Zeile $i = 2, 3, \ldots, M$ und bestimme λ so, dass $\lambda a_{11} + a_{i1} = 0$.

Verfahren in den nächsten Schritten analog.

Beispiel: Erdbebenhilfe

$$(A|b) = (A^{(0)}|b^{(0)}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 200 & 300 & 80 & 60 & 60000 \\ 150 & 100 & 60 & 70 & 40000 \\ 2 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 1000 & 300 & 400 & 200 & 150000 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \\ \lambda = -\frac{3}{4} \\ \lambda = -\frac{1}{100} \\ \lambda = -5 \end{array}$$

$(A^{(0)})_{11} = 200$ heißt Pivot-Element im ersten Schritt

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 200 & 300 & 80 & 60 & 60000 \\ 0 & -125 & 0 & 25 & -5000 \\ 0 & -1 & -\frac{4}{5} & -\frac{8}{5} & -600 \\ 0 & -1200 & 0 & -100 & -150000 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \\ \\ \lambda = -\frac{1}{125} \\ \lambda = -\frac{1200}{125} \end{array} \quad = (A^{(1)}|b^{(1)})$$

$(A^{(1)})_{22} = -125$ ist Pivot-Element im 2-ten Schritt.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 200 & 300 & 80 & 60 & 60000 \\ 0 & -125 & 0 & 25 & -5000 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{5} & -\frac{9}{5} & -560 \\ 0 & 0 & 0 & -340 & -102000 \end{array}\right) = (A^{(2)}|b^{(2)}) = (\hat{A}|\hat{b})$$

"GaußVerfahren (Teil 1)" $(\hat{A}|\hat{b})$ hat Zeilenstufenform.

Nun gilt: $rg(A) = rg(\hat{A}) = 4$

$rg(A|b) = rg(\hat{A}|\hat{b}) = 4$

$\Rightarrow \quad rg(A) = rg(A|b) \quad \Rightarrow$ das lineare Gleichungssystem ist lösbar.

$4 =$ Anzahl der Unbekannten $\Rightarrow$ Lösung ist eindeutig.

Für ein allgemeines System $Ax = b$ liefert das Gauß - Verfahren eine Sequenz $(A|b) = (A^{(0)}|b^{(0)}) \sim (A^{(1)}|b^{(1)}) \sim (A^{(2)}|b^{(2)}) \sim \ldots \sim (A^{(M-1)}|b^{(M-1)}) = (\hat{A}|\hat{b})$ und $(\hat{A}|\hat{b})$ hat Zeilenstufenform. An $(\hat{A}|\hat{b})$ lässt sich die Lösbarkeit von $Ax = b$ ablesen.

Im Falle der Lösbarkeit lässt sich die Lösung von $Ax = b$ durch Rückwärtsauflösen $\hat{A}x = \hat{b}$ berechnen.

Beispiel 1 (Erdbebenhilfe):

$$\begin{array}{lll} -340x_4 = -102000, & \Rightarrow & x_4 = \frac{-102000}{-340} = 300 \\ -\frac{4}{5}x_3 - \frac{9}{5}x_4 = -\frac{4}{5}x_3 - \frac{9}{5} \cdot 300 = -560 & \Rightarrow & x_3 = 25 \\ -125x_2 + 0x_3 + 25x_4 = -125x_2 + 25 \cdot 300 = -5000 & \Rightarrow & x_2 = 100 \\ 200x_1 + 300x_2 + 80x_3 + 60x_4 = 200x_1 + 300 \cdot 100 + 80 \cdot 25 + 60 \cdot 300 = 60000 & \Rightarrow & x_1 = 50 \end{array}$$

Lösung : $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (50, 100, 25, 300)$

Beispiel 2: Sei $A \in \mathbb{R}^{4,5},\ b \in \mathbb{R}^4$ wie folgt gegeben:

$$(A|b) = (A^{(0)}|b^{(0)}) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 4 & 4 & -2 & 0 & 6 \\ 4 & 8 & 8 & -4 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 5 & 2 & 1 & 3 \\ 6 & 12 & 12 & -6 & 4 & 10 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \lambda = -2 \\ \lambda = -1 \\ \lambda = -3 \end{array}$$

$$\left(A^{(1)}|b^{(1)}\right) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 4 & 4 & -2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -8 \end{array}\right) \text{ tausche 2. und 3. Zeile}$$

$$\left(A^{(2)}|b^{(2)}\right) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 4 & 4 & -2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -8 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ \lambda = -1 \end{array}$$

$$\left(\hat{A}|\hat{b}\right) = \left(A^{(3)}|b^{(3)}\right) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 4 & 4 & -2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow \quad rg\left(\hat{A}\right) = rg(A) = 3,\ rg\left(\hat{A}|\hat{b}\right) = rg(A|b) = 3,$ da $\left(\hat{b}\right)_4 = 0$

$\Rightarrow \quad Ax = b$ ist lösbar. Die Lösung ist wegen $rg(A|b) = 3 < 5 =$ Anzahl der Unbekannten nicht eindeutig!

Rückwärts auflösen:

$$\begin{array}{lll} 4x_5 = -8 & \Rightarrow & x_5 = -2 \\ x_3 + 4x_4 + x_5 = x_3 + 4x_4 - 2 = -3 & \Rightarrow & x_3 = -1 - 4x_4 \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 2x_1 + 4x_2 + 4(-1 - 4x_4) = 6 & \Rightarrow & x_1 = 5 - 2x_2 + 9x_4 \end{array}$$

Lösungsgesamtheit: $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R}^5 \mid x_5 = -2,\ x_3 = -1 - 4x_4,\ x_1 = 5 - 2x_2 + 9x_4\}, \quad x_2, x_4$ frei wählbar.

5.2.3 Matrixgleichung und Inversenberechnung

Das Gauß'sche Verfahren lässt sich auch zur Lösung einer Matrixgleichung verwenden.
$AX = B,\ A \in \mathbb{R}^{M,N},\ X \in \mathbb{R}^{N,K},\ B \in \mathbb{R}^{M,K}$

Stellt man die Matrizen in der Form $X = (x^1, x^2, x^3, \ldots, x^K), x^i \in \mathbb{R}^N$ i-te Spalte von X. $B = (b^1, b^2, \ldots, b^K)$, $b^i \in \mathbb{R}^M$ i-te Spalte von B, $i = 1, \ldots, K$ dann ist die Lösung von $AX = B$ äquivalent zur Lösung von $Ax^i = b^i,\ i = 1, \ldots, K$ d.h. $AX = B$ entspricht K-gewöhnlichen linearen Gleichungssystemen mit einer Matrix A und K-rechten Seiten $b^i,\ i = 1, \ldots, K$

Bringe hier für die erweiterte Matrix $(A|B)$ auf Zeilenstufenform.
Wichtiger Spezialfall: Sei $M = N = K$ und sei $A \in \mathbb{R}^{N,N}$ invertierbar. Dann ergibt sich die Inverse A^{-1} als Lösung von $A \cdot X = I_N$, d.h. ich wende den Gauß-Algorithmus auf $(A|I_N)$ an.

5.2.4 Das Gauß-Jordan Verfahren

Das Zielsystem des Gauß-Jordan Verfahrens ist nicht eine Matrix $\hat{A}$ in Zeilenstufenform, sondern die Identität. In jedem Eleminationsschritt werden nicht nur die Elemente unterhalb des Pivot-Elements transformiert, sondern auch alle Elemente oberhalb. Ferner wird das Pivot-Element auf 1 transformiert.

Das Gauß-Jordan Verfahren liefert für $A \in \mathbb{R}^{N,N}$, A invertierbar, eine Sequenz $(A|b) = \left(A^{(0)}|b^{(0)}\right) \sim \left(A^{(1)}|b^{(1)}\right) \sim \ldots \sim \left(A^{(N)}|b^{(N)}\right) = \left(I|A^{-1}b\right)$

<u>Beispiel zur Inversenberechnung:</u> $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\left(A^{(0)}|B^{(0)}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \lambda = -\frac{1}{3} \\ \lambda = -\frac{2}{3} \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & -1 & -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -1 & -\frac{2}{3} & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{3} & 2 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & -1 & -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -1 & -\frac{2}{3} & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \lambda = -\frac{1}{2} \\ \\ \lambda = -\frac{1}{2} \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & -1 & -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right) \sim \ldots \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \quad X = A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 5 \\ 1 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

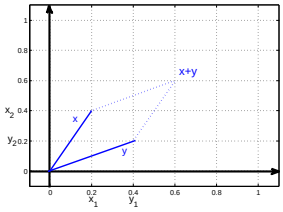
(ober- und unterhalb des Pivot-Elementes Nullen erzeugen und das Pivot-Element jedes mal normieren)

5.3 Determinanten

5.3.1 Motivation

Seien $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

Gesucht: Fläche bzw. Volumen des Parallelogramms



Sei $V = V(x, y)$ das Volumen des Parallelogramms zu x und y. Man erhält $V(x, y) = x_1y_2 - y_1x_2$.

Im allgemeinen hat das Volumen V folgende Eigenschaften:

- V ist linear in jeder Variablen, d.h. $V(u + \alpha v, y) = V(u, y) + \alpha V(v, y)$ (analog in der 2. Variablen)
- Sind x und y linear abhängig, so ist $V(x, y) = 0$
- Für die Einheitsvektoren $e^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ gilt: $V(e^1, e^2) = 1$

Eine Funktion $V = V(x, y)$ mit diesen drei Eigenschaften heißt Determinante. Man schreibt dann $\det(x, y) = x_1y_2 - x_2y_1$.

Genauer beschreibt die Determinante das orientierte Volumen des von x und y aufgespannten Parallelogramm. Das Volumen selbst ist dann durch den Betrag der Determinante gegeben.

Für eine Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}$ setze $a^i \hat{=}$ die i-te Spalte von A, $a^1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$, $a^2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$

Setze $\det(A) = \det(a^1, a^2) = (a^1)_1(a^2)_2 - (a^1)_2(a^2)_1 = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

Verallgemeinerung dieses Konzepts (allgemeines N):
Seien $v^1, v^2, \ldots, v^N \in \mathbb{R}^N$

Die Determinante ist die Volumenfunktion des durch $v^1, v^2, \ldots, v^N$ in $\mathbb{R}^N$ aufgespannten "N-dimensionalen Parallelogramms"

Es gilt wieder:

- $\det(v^1, v^2, \ldots, v^N)$ ist linear in jeder Variablen
- $\det(v^1, v^2, \ldots, v^N) = 0$, falls $v^1, \ldots, v^N$ linear abhängig
- $\det(e^1, \ldots, e^N) = 1$

Für eine Matrix $A = (a^1, a^2, \ldots, a^N) \in \mathbb{R}^{N,N}$, $a^i \hat{=}$ i-te Spalte von A, $i = 1, \ldots, N$ setzt man
$\det(A) = \det(a^1, a^2, \ldots, a^N)$

5.3.2 Eigenschaften von Determinanten

- Addiert man zu einer Zeile oder Spalte ein Vielfaches einer anderen Zeile / Spalte, so ändert sich der Wert der Determinante nicht.
- Vertauscht man zwei Zeilen oder Spalten, so multipliziert sich die Determinante mit -1.
- Multiplizieren einer Zeile / Spalte mit einem Faktor $\lambda \neq 0$ liefert das λ-fache der Determinante.

- Die Determinante einer Dreiecksmatrix ist das Produkt der Diagonalelemente.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} * & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ * & \dots & * \end{pmatrix}}_{\text{linke untere Dreiecksmatrix}} \qquad \underbrace{\begin{pmatrix} * & \dots & * \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & * \end{pmatrix}}_{\text{rechte obere Dreiecksmatrix}}$$

<u>Beispiel:</u> $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -4 & 5 \\ 6 & -6 & 12 \end{pmatrix}$ (vgl. Bsp. Rang aus 5.1.4)

Mit Hilfe elementarer Zeilenumformungen und einmaligem Vertauschen von zwei Zeilen haben wir A auf Zeilenstufenform

$\hat{A} = \begin{pmatrix} 6 & -6 & 12 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

gebracht. Somit gilt

$\det(A) = -\det(\hat{A}) = \underbrace{-1}_{\text{Zeile getauscht}} \cdot (6 \cdot -1 \cdot -3) = -18$

5.3.3 La Place Entwicklungen für Determinanten

<u>Ansatz:</u>

$N = 1$ sei $A \in \mathbb{R}^{1,1}$, $A = (a_{11})$ Setze: $\det(A) = a_{11}$

$N = 2$ sei $A \in \mathbb{R}^{2,2}$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ Setze: $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$

$N \geq 3$ sei $A \in \mathbb{R}^{N,N}$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & \dots & a_{N,N} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N,N}$

Zu $A \in \mathbb{R}^{N,N}$ sei A^{ij} diejenige $(N-1) \times (N-1)$-Matrix, welche aus A durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte hervorgeht.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & \underline{6} \\ \underline{1} & \underline{2} & \underline{0} \\ 7 & -1 & \underline{1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3} \quad \Rightarrow \quad A^{23} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 7 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}$$

Dann gilt für jedes $i = 1, \dots, N$ durch "Entwicklung nach Zeile i":

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{N} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A^{ij})$$

und für jedes $j = 1, \dots, N$ durch "Entwicklung nach Spalte j":

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{N} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A^{ij})$$

Das Vorzeichen von $(-1)^{i+j}$ lässt sich mit Hilfe des Schachbrettmusters bestimmen:

$\begin{pmatrix} + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ + & - & + & - & \dots \end{pmatrix}$ "Schachbrettmuster"

<u>Beispiel:</u> $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -4 & 5 \\ 6 & -6 & 12 \end{pmatrix}$ Entwicklung nach Zeile 1 (wegen $a_{11} = 0$)

$$\det(A) = (-1)^{1+1} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} -4 & 5 \\ -6 & 12 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 12 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 6 & -6 \end{vmatrix}$$
$$= -2(36-30) - (-18+24) = -12 - 6 = -18$$

Das Volumen des von den Spalten der Matrix A aufgespannten Parallelogramms hat $|\det(A)| = 18$ Einheiten.

5.3.4 Spezielle Klassen von Matrizen

Sei $A \in \mathbb{R}^{M,N},\ A = (a_{ij}),\ i = 1, \dots, M,\ j = 1, \dots, N$

Dann ist die transponierte Matrix definiert durch: $A^T = (a_{ji}) \in \mathbb{R}^{N,M}$

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,2}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,3}$ "Transponierte von A"

Jede Zeile wird zur Spalte / jede Spalte wird zur Zeile!

Rechenregeln für die Transposition:

- $(A^T)^T = A$,
- $(\alpha A)^T = \alpha A^T,\ \alpha \in \mathbb{R}$,
- $(A+B)^T = A^T + B^T$,
- $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} = A$$

- Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{N,N}$ heißt symmetrisch, falls $A = A^T$
- Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{N,N}$ heißt idempotent, wenn $A^2 = A \cdot A = A$
- Eine reguläre Matrix $A \in \mathbb{R}^{N,N}$ heißt orthogonal, falls $A^{-1} = A^T$

Bemerkung: Hesse-Matrizen an einer festen Stelle sind symmetrisch.

$f : D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}^N$ zweimal differenzierbar
$\nabla f(x) \in \mathbb{R}^N,\ x \in D$ "Gradient von f"
$\nabla^2 f(x) \in \mathbb{R}^{N,N},\ x \in D$ "Hesse-Matrix von f"

An jeder Stelle $x \in D$ ist $\nabla^2 f(x)$ symmetrisch!

Rechenregeln für Determinanten: Seien $A, B \in \mathbb{R}^{N,N}$

i) $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$

ii) Ist A invertierbar, so gilt: $1 = \det(I_N) = \det(A \cdot A^{-1}) = \det(A) \cdot \det(A^{-1})$, d.h $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$.

iii) $\det(A) = 0$, falls $rg(A) < N$ (d.h. A nicht invertierbar)

iv) $\det(A) = \det(A^T)$

v) Sei $A \in \mathbb{R}^{N,N}$ orthogonal.

$$1 = \det(I_N) = \det(A \cdot A^{-1}) = \det(A) \cdot \det(\underbrace{A^{-1}}_{=A^T}) = \det(A) \cdot \underbrace{\det(A^T)}_{=\det(A)} = \det(A)^2$$

$$\Rightarrow \quad \det(A) = \pm 1$$

5.3.5 Lösen von linearen Gleichungssystemen mit Determinanten

Sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{N,N}$ invertierbar und $b = (b_i) \in \mathbb{R}^N$. Betrachte $Ax = b$

Für $j = 1, \ldots, N$ sei $A_{j,b} \in \mathbb{R}^{N,N}$ diejenige Matrix, welche entsteht, wenn in A die j-te Spalte durch den Vektor b ersetzt wird. Dann gilt für die eindeutige Lösung $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} = A^{-1}b$ die Darstellung:

$$x_j = \frac{\det(A_{j,b})}{\det(A)}, \quad j = 1, \ldots, N \quad \text{"Cramer'sche Regel"}$$

<u>Beachte:</u> $\det(A) \neq 0$, da A invertierbar.

Bemerkung: Diese Methode wird z.B. angewandt, wenn man nur eine Komponente der Lösung berechnen, und nicht die gesamte Lösung ausrechnen möchte.

<u>Beispiel:</u> $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 6 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 15 \\ -5 \\ 28 \end{pmatrix}, \quad$ Gesucht: $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$$\det(A) = 2 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = 2(-3-10) - 4(1-12) - 1(5+18) = -26+44-23 = \underline{-5}$$

$$\det(A_{1,b}) = \det \begin{pmatrix} 15 & 4 & -1 \\ -5 & -3 & 2 \\ 28 & 5 & 1 \end{pmatrix} = 15 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 28 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} -5 & -3 \\ 28 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 15(-3-10) - 4(-5-56) - (-25+84) = -195 + 244 - 59 = -10 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \tfrac{-10}{-5} = 2$$

$$\det(A_{2,b}) = -15 \quad \Rightarrow \quad x_2 = \tfrac{-15}{-5} = 3$$

$$\det(A_{3,b}) = -5 \quad \Rightarrow \quad x_3 = \tfrac{-5}{-5} = 1$$

$$\Rightarrow \quad x = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

5.3.6 Quadratische Formen

Sei $A \in \mathbb{R}^{N,N}$ eine symmetrische Matrix, d.h. $A = A^T$.
Eine Abbildung $Q : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $Q(x) = \underbrace{x^T \cdot \underbrace{A \cdot x}_{\in \mathbb{R}^N}}_{\in \mathbb{R}}$ heißt quadratische Form in N Variablen.

<u>Definition:</u>

Eine quadratische Form $Q(x) = x^T \cdot A \cdot x = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} a_{ij} x_i x_j$ bzw. die symmetrische Matrix heißt:

i) positiv definit (negativ definit), wenn $Q(x) = x^T \cdot A \cdot x > 0 \ (< 0)$ für alle $x \in \mathbb{R}^N$, $x \neq 0$

ii) positiv semidefinit (negativ semidefinit), wenn $Q(x) = x^T \cdot A \cdot x \geq 0 \ (\leq 0)$ für alle $x \in \mathbb{R}^N$

<u>Bemerkung:</u> $Q(x)$ heißt indefinit, falls A regulär und $Q(x)$ weder positiv noch negativ definit ist. Ist A

nicht regulär, so heißt $Q(x)$ entartet.

<u>Beispiel:</u> $N = 2, \quad A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}$ symmetrisch , $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$$Q(x) = x^T A x = (x_1, x_2)^T \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (x_1, x_2)^T \cdot \begin{pmatrix} 4x_1 - 2x_2 \\ -2x_1 + 8x_2 \end{pmatrix} = 4x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_2 + 8x_2^2$$

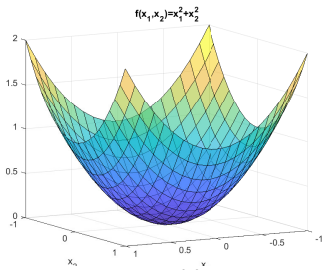
$$= 2x_1^2 + (2x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_2^2) + 6x_2^2 = 2x_1^2 + 2(x_1 - x_2)^2 + 6x_2^2 \geq 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^2 \quad \text{(positiv semidefinit)}$$

Sei $Q(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 2(x_1 - x_2)^2 + 6x_2^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 0,\ x_1 - x_2 = 0,\ x_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$

$$Q(x) = \begin{cases} > 0 & \text{für } x \in \mathbb{R}^2 \backslash \{0\} \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad Q(x) \text{ positiv definit}$$

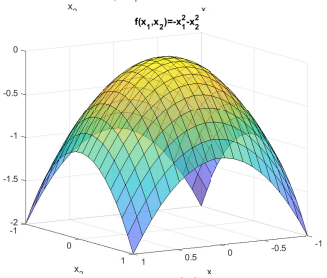
Visualisierung von Q für $N = 2$ nahe $x = 0$

$(x, Q(x)) = (x_1, x_2, Q(x_1, x_2)) \in \mathbb{R}^3$



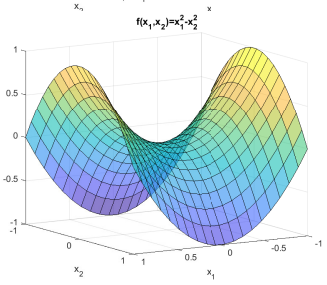
$Q(x)$ <u>positiv definit</u>

$(0, 0)$ lokales Minimum von Q.



$Q(x)$ <u>negativ definit</u>

$(0, 0)$ lokales Maximum von Q.



$Q(x)$ <u>indefinit</u>

$(0, 0)$ ist weder lokales Minimum noch lokales Maximum von Q

<u>Genauer:</u> $(0, 0)$ ist <u>Sattelpunkt</u> von Q.

Kriterien für Definitheit von quadratischen Formen bzw. symmetrischen Matizen

Satz:

Eine quadratische Form $Q(x) = x^T Ax$, bzw. die symmetrische Matrix A ist positiv (negativ) definit genau dann, wenn

$$\det(A_K) > 0, \quad K = 1, \dots, N \quad ((-1)^K \det(A_K) > 0, \quad K = 1, \dots, N)$$

Dabei bezeichnet $A_K = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1K} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{K1} & \dots & a_{KK} \end{pmatrix}, \quad K = 1, \dots, N$

die Hauptabschnittsmatrix von $A \in \mathbb{R}^{N,N}$

$$A_1 = (a_{11}), \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \dots, \quad A_N = A$$

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \quad A_1 = 4, \ \det(A_1) = 4, \quad A_2 = A, \ \det(A_2) = 4 \cdot 8 - 4 > 0$

$\Rightarrow \quad$ A positiv definit

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N,N}$

Nach Aufgabe 5, Blatt 2 gilt: $\det(A_i) = i + 1, \quad i = 1, \dots, N$

Nun gilt: $\det(A_i) = i + 1 > 0$, d.h. A ist positiv definit.

5.3.7 Quadratische Formen auf Unterräumen bzw. mit Nebenbedingungen

Oft sind in der Optimierung quadratische Formen mit Nebenbedingungen zu analysieren.

Betrachte: $Q(x) = x^T Ax$ mit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2} \quad \Rightarrow \quad Q(x) = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2$

Angenommen die Variablen x_1, x_2 unterliegen der Nebenbedingung

$Bx = px_1 + qx_2 = 0, \quad B = (p, q)$

Löse die NB auf: $x_2 = \frac{-px_1}{q}, \quad q \neq 0$

Einsetzen liefert:

$$Q\left(x_1, \frac{-px_1}{q}\right) = ax_1^2 + 2bx_1\left(\frac{-px_1}{q}\right) + c\left(\frac{-px_1}{q}\right)^2 = ax_1^2 - \frac{2bp}{q}x_1^2 + \frac{cp^2}{q^2}x_1^2 = \frac{1}{q^2}\underbrace{(aq^2 - 2bpq + cp^2)}_{>0 \quad \Leftrightarrow \quad Q>0}x_1^2$$

Definiere: $C = \begin{pmatrix} 0 & B \\ B^T & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & p & q \\ p & a & b \\ q & b & c \end{pmatrix}$

Nun gilt:

$$\begin{aligned} \det(C) &= \begin{vmatrix} 0 & p & q \\ p & a & b \\ q & b & c \end{vmatrix} = 0 \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} - p \cdot \begin{vmatrix} p & b \\ q & c \end{vmatrix} + q \cdot \begin{vmatrix} p & a \\ q & b \end{vmatrix} \\ &= -p(pc - qb) + q(pb - aq) = -p^2c + qbp + qbp - aq^2 \\ &= -(p^2c - 2qbp + aq^2) \end{aligned}$$

<u>Allgemeiner Fall:</u> Sei $A = (a_{ij}), \quad 1 \leq i, j \leq N,$ A symmetrisch

$Q(x) = x^T Ax = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} a_{ij}x_ix_j$ zugehörige quadratische Form.

Ferner sei $B = (b_{ij}), \ 1 \leq i \leq l, \ 1 \leq j \leq N, \ B \in \mathbb{R}^{l,N}, l < N$ eine Matrix, welche die Nebenbedingungen

$$Bx = 0, \quad \text{d.h.} \quad \begin{aligned} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \ldots + b_{1N}x_N &= 0 \\ &\vdots \\ b_{l1}x_1 + b_{l2}x_1 + \ldots + b_{lN}x_N &= 0 \end{aligned} \quad \text{festlegt.}$$

Setze die Matrix $C = \begin{pmatrix} 0 & B \\ B^T & A \end{pmatrix}$, $0 \in \mathbb{R}^{l,l}, \ B \in \mathbb{R}^{l,N}, \ B^T \in \mathbb{R}^{N,l}, \ A \in \mathbb{R}^{N,N}$, d.h.

$C \in \mathbb{R}^{N+l,N+l}$

<u>Definition:</u>

Eine quadratische Form $Q(x) = x^T Ax$ heißt positiv [negativ] definit unter einer Nebenbedingung $Bx = 0$, falls $x^T Ax > [<] \ 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^N$ mit $Bx = 0$, $x \neq 0$.

<u>Satz:</u>

Die quadratische Form $Q(x) = x^T Ax$ ist positiv definit unter der Nebenbedingung $Bx = 0$, falls für die (k, k)-Hauptuntermatrizen h_k von C gilt:

$$(-1)^l \det(h_{2l+i}) > 0, \quad i = 1, \ldots, N - l$$

N$\hat{=}$ Anzahl Variablen, l$\hat{=}$ Anzahl Nebenbedingungen

$Q(x)$ ist negativ definit unter der Nebenbedingung $Bx = 0$, falls

$$(-1)^{l+i} \det(h_{2l+i}) > 0, \quad i = 1, \ldots, N-l$$

<u>Beispiel:</u> $Q(x) = x^T A x = 3x_1^2 - x_2^2 + 4x_3^2, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad N = 3,\ l = 1$

NB: $Bx = x_1 + x_2 + x_3 = 0, \quad B = (1, 1, 1)$

Finde also $C = \begin{pmatrix} 0 & B \\ B^T & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4,4}$

Zu berechnen sind $\det(h_3) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ und $\det(h_4) = \det(C)$

Man findet $\det(h_3) = -2$ und $\det(h_4) = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} + 0 + 0 + 4 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}}_{=\det(h_3)=-2}$

$= (-1) \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} - 8 = 3 - 8 = -5$

Wegen $(-1)^1 \det(h_3) = 2 > 0, \quad (-1)^1 \det(h_4) = 5 > 0$ folgt, dass $Q(x) = x^T A x$ positiv definit unter der Nebenbedingung $Bx = 0$ ist.

5.4 Eigenwerte und Eigenvektoren

5.4.1 Definition und Eigenschaften

Sei $A \in \mathbb{R}^{N,N}$. Dann heißt

$$\begin{aligned} Ker(A) &= \{x \in \mathbb{R}^N \mid Ax = 0\} && \text{"Kern von A"} \\ Bi(A) &= \{y \in \mathbb{R}^N \mid \exists\, x \in \mathbb{R}^N : Ax = y\} && \text{"Bild von A"} \end{aligned}$$

Es gilt immer: $0 \in Ker(A), \quad 0 \in Bi(A)$

Satz: Für $A \in \mathbb{R}^{N,N}$ sind gleichwertig:

i) A ist invertierbar

ii) $\det(A) \neq 0$

iii) $Ker(A) = \{0\}$

iv) $Bi(A) = \mathbb{R}^N$

Definition (Eigenwert, Eigenvektor):

Sei $A \in \mathbb{R}^{N,N}$. Ein Vektor x und eine Zahl λ heißen Eigenvektor und Eigenwert von A, falls $x \neq 0$ und $Ax = \lambda x$.

Eigenvektoren x werden unter A auf ein Vielfaches von sich selbst abgebildet.

Bemerkung: Der Eigenvektor x ist nicht eindeutig, denn

$$Ax = \lambda x \quad \Leftrightarrow \quad A(\alpha x) = \lambda(\alpha x),\ \alpha \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = \alpha x,\ Ay = \lambda y$$

Bedeutung: $Ax = \lambda x \quad \Leftrightarrow \quad Ax - \lambda x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (A - \lambda I_N)x = 0,\ x \neq 0$

d.h. $x \in Ker(A - \lambda I_N),\ x \neq 0$

Dies bedeutet: $A - \lambda I_N$ ist nicht invertierbar bzw. $\det(A - \lambda I_N) = 0$

Die Matrix $A - \lambda I_N$ hat folgende Form:

$$A - \lambda I_N = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} & \dots & a_{2N} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda & \dots & a_{3N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & a_{N3} & \dots & a_{NN} - \lambda \end{pmatrix}$$

$p(\lambda) = \det(A - \lambda I_N)$ ist ein Polynom vom Grade N, das "charakteristische Polynom" der Matrix A. $p(\lambda)$ kann z.B. nach La Place berechnet werden.

Satz:

λ ist genau dann Eigenwert zu einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{N,N}$, wenn λ Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist. Jedes $x \in Ker(A - \lambda I_N),\ x \neq 0$ ist Eigenvektor von A zum Eigenwert λ.

Bezeichnung: $E(\lambda, A) = Ker(A - \lambda I_N)$, λ Eigenwert

heißt Eigenraum zum Eigenwert λ von A.

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -6 & -6 \end{pmatrix}$ Gesucht: Eigenwerte und Eigenvektoren von A

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(A - \lambda I_3) \\ &= \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 2-\lambda & 2 \\ -3 & -6 & -6-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (-1-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ -6 & -6-\lambda \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -3 & -6-\lambda \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & 2-\lambda \\ -3 & -6 \end{vmatrix} \\ &= (-1-\lambda)\left[(2-\lambda)(-6-\lambda)+12\right] - 2\left[2(-6-\lambda)+6\right] + 2\left[-12+3(2-\lambda)\right] \\ &= \ldots = -\lambda(\lambda+2)(\lambda+3) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ A hat die Eigenwerte: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = -3$

$\lambda_1 = 0$: $(A - \lambda_1 I_3) \cdot v^1 = Av^1 = 0$

Gauss-Elimination: $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ -3 & -6 & -6 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \lambda = 2 \\ \lambda = -3 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 6 & 0 \\ 0 & -12 & -12 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \lambda = 2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Bei der Berechnung von Eigenvektoren muss $(A - \lambda I_N)$ nach Gauss-Elimination immer mindestens eine Nullzeile haben!

$$\begin{array}{lll} \text{Normiere:} & (v^1)_3 = 1 & \\ 6(v^1)_2 + 6 \cdot 1 = 0 & \Rightarrow \quad (v^1)_2 = -1 & \Rightarrow \quad (v^1) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ Eigenvektor zu } \lambda_1 = 0 \\ -(v^1)_1 - 2 + 2 = 0 & \Rightarrow \quad (v^1)_1 = 0 & \end{array}$$

$\lambda_2 = -2$: $(A - \lambda_2 I_3)v^2 = (A + 2I_3)v^2 = 0$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 0 \\ -3 & -6 & -4 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \lambda = -2 \\ \lambda = 3 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \lambda = 1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$$\begin{array}{lll} -2(v^2)_3 = 0 & \Rightarrow \quad (v^2)_3 = 0 & \\ \text{Normiere:} & (v^2)_2 = 1 & \Rightarrow \quad v^2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ (v^2)_1 + 0 + 2 = 0 & \Rightarrow \quad (v^2)_1 = -2 & \end{array}$$

$\lambda_3 = -3$: Analog folgt: $v^3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}$ Gesucht: Eigenwerte und Eigenvektoren von A.

charakteristisches Polynom: $p(\lambda) = \det(A - \lambda I_N) = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} = (-\lambda)^2 + 1 = \lambda^2 + 1 \overset{!}{=} 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2 = -1$

Das Polynom $p(\lambda)$ hat in $\mathbb{R}$ keine Nullstellen!

5.4.2 Komplexe Zahlen

Führe formal die imaginäre Einheit "i" ein als Lösung der Gleichung $i^2 = -1$.

In diesem Fall hat die Gleichung $p(\lambda) = \lambda^2 + 1 = 0$ die Lösung $\lambda_{1,2} = \pm i$

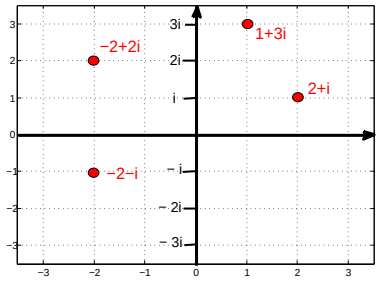
Allgemein nennt man eine Zahl $z = a + bi \quad a, b \in \mathbb{R}$, i imaginäre Einheit
eine komplexe Zahl und setzt $\mathbb{C} = \{z = a + bi, \quad a, b \in \mathbb{R}\}$ "Menge der komplexen Zahlen"
Offensichtlich gilt $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Bezeichnung: $a = Re(z) \hat{=}$ Realteil von z

$b = Im(z) \hat{=}$ Imaginärteil von z

Vorstellung: Stelle die beiden reellen Zahlen a,b einer komplexen Zahl $z = a + bi$ als Vektor (a, b) dar und interpretiere sie als Punkt im $\mathbb{R}^2$

"Gauß'sche Zahlenebene"



Addition komplexer Zahlen: $(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) := (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$

Multiplikation komplexer Zahlen:

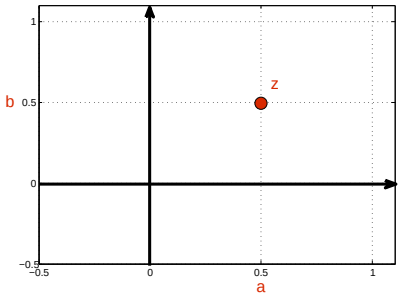
$(a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 + a_1 b_2 i + a_2 b_1 i + i^2 b_1 b_2 = a_1 a_2 - b_1 b_2 + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$

Für die Addition und Multiplikation komplexer Zahlen gelten alle Eigenschaften, welche für die reellen Zahlen gültig sind. $\mathbb{C}$ bzw. genauer $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ heißt deshalb Körper der komplexen Zahlen.

Weitere Setzungen:
Zu $z = a + bi$ heißt $\bar{z} = a - bi$ die konjugiert komplexe Zahl

Rechenregeln:

$$\begin{aligned} \overline{z + w} &= \overline{z} + \overline{w} \quad w, z \in \mathbb{C} \\ \overline{z \cdot w} &= \overline{z} \cdot \overline{w} \\ \overline{\overline{z}} &= z \end{aligned}$$

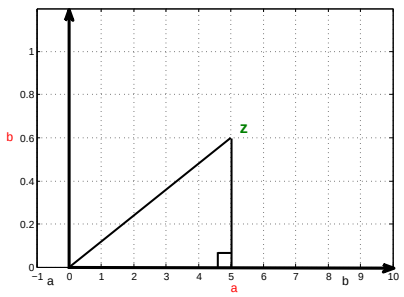


Für jedes $z \in \mathbb{C}$ gilt: $z \cdot \overline{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 - i^2 b^2 = a^2 + b^2 \quad \in \mathbb{R}$

Man definiert

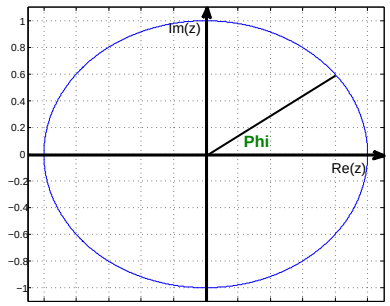
$|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$

"Betrag der komplexen Zahl z"



Behalte die Anschauung der Gauß'schen Zahlenebene bei.
Jede komplexe Zahl z mit $|z| = 1$ lässt sich schreiben als $z = E(\Phi) = \cos(\Phi) + i\sin(\Phi)$

Φ ist der Winkel zwischen $z = E(\Phi)$ und der reellen Achse im Bogenmaß



Man rechnet leicht nach, dass gilt: $E(\Phi) \cdot E(\Psi) = E(\Phi + \Psi), \quad E(0) = 1$

<u>Komplexe exp-Funktion:</u>

$$E(\Phi) = \cos(\Phi) + i\sin(\Phi) = \exp(i\Phi) = e^{i\Phi} \quad \text{"Eulersche Formel"}$$

Man kann nun komplexe Zahlen stets schreiben als:

$$\begin{aligned} z &= |z| \cdot E(\Phi) = |z| \cdot E(\Phi) = |z| \exp(i\Phi) \\ z \cdot w &= |z| \cdot |w| \cdot E(\Phi) \cdot E(\Psi) = |z||w| \cdot \exp(i\Phi) \cdot \exp(i\Psi) \\ &= |z||w| \cdot E(\Phi + \Psi) = |z||w| \cdot \exp(i(\Phi + \Psi)) \end{aligned}$$

Die Multiplikation von komplexen Zahlen ist also geometrisch eine Drehstreckung!

Sei nun $z = a + bi$.
Dann findet man $|z| = (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}$ und $\tan(\Phi) = \frac{b}{a}, \quad a > 0$ d.h. $\Phi = \arctan(\frac{b}{a}), \quad a > 0$

Im allgemeinen findet man: $\begin{cases} \arctan(\frac{b}{a}), & \text{falls } a > 0 \\ \arctan(\frac{b}{a}) + \pi, & \text{falls } a < 0,\ b \geq 0 \\ \arctan(\frac{b}{a}) - \pi & \text{falls } a < 0,\ b < 0 \\ \pi/2, & \text{falls } a = 0,\ b > 0 \\ -\pi/2, & \text{falls } a = 0,\ b < 0 \end{cases}$

Somit gilt (zumindest für $a \geq 0$) :

$$z = a + bi = \underbrace{\left(a^2 + b^2\right)^{\frac{1}{2}}}_{r} \cdot \left(\cos\left(\underbrace{\arctan\left(\frac{b}{a}\right)}_{\Phi} \right) + i \sin\left(\underbrace{\arctan\left(\frac{b}{a}\right)}_{\Phi} \right) \right)$$

$z = r(\cos(\Phi) + i\sin(\Phi))$

$z = r \cdot \exp(i \cdot \Phi)$ "Polarkoordinatendarstellung"

Es lässt sich zeigen, dass diese Formel auch für $a \leq 0$, d.h. für alle komplexen Zahlen $z = a + bi \neq 0$ gilt. Damit erhält man für die Potenzen von z folgende Darstellung:

$$z^n = r^n \cdot (\cos(\Phi) + i\sin(\Phi))^n = r^n \cdot \exp(i\Phi)^n = r^n \cdot \exp(i\,n\Phi) = r^n \cdot (\cos(n\Phi) + i\sin(n\Phi))$$

5.4.3 Komplexe Eigenwerte

Nach unserem Einschub über komplexe Zahlen kehren wir zum Eigenwertproblem zurück.

Wir haben gesehen, dass eine reelle Matrix also durchaus komplexe Eigenwerte haben kann.

Satz (Fundamentalsatz der Algebra) :

Jedes Polynom $p(t) = \sum_{i=0}^{N} a_i t^i, \quad a_0, a_1, a_2, \ldots, a_N \in \mathbb{R}, \quad a_N \neq 0$ zerfällt in komplexe Linearfaktoren über $\mathbb{C}$, d.h. es gibt $t_1, \ldots, t_N \in \mathbb{C}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$ mit

$$p(t) = \alpha(t - t_1)(t - t_2) \cdot \ldots \cdot (t - t_N)$$

Beipiel: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}$

charakteristisches Polynom: $p(\lambda) = \det(A - \lambda\, I_2)$

$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1 = (\lambda - i)(\lambda + i)$

Nullstellen: $\lambda_1 = i, \ \lambda_2 = -i \quad (\lambda_2 = \overline{\lambda_1}) \quad$ in $\mathbb{C}$

Bemerkung: i) Die Nullstellen eines reellen Polynoms in $\mathbb{C}$ sind immer konjugiert komplex, d.h., ist μ eine Nullstelle von diesem Polynom $p(\lambda)$, so auch $\bar{\mu}$.

ii) Sind die Eigenwerte einer Matrix komplex, so sind auch die Eigenvektoren komplex. Weiter gilt:

$$Ax = \lambda x \quad \Leftrightarrow \quad \overline{Ax} = \overline{\lambda x} \quad \Leftrightarrow \quad A\bar{x} = \bar{\lambda}\bar{x}, \quad x \in \mathbb{C}^n$$

Berechnung der Eigenvektoren (Gauß - Algorithmus in $\mathbb{C}$):

$$(A - \lambda_1\, I_2)x^1 = \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{array}{cc|c} -i & 1 & 0 \\ -1 & -i & 0 \end{array}\right) \lambda = i \quad \sim \left(\begin{array}{cc|c} -i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Wähle $x_2 = 1$ und finde $\begin{array}{ll} -i \cdot x_1 + x_2 & = -i \cdot x_1 + 1 = 0 \\ -i \cdot x_1 = -1 & \Leftrightarrow \quad x_1 = -i \end{array} \quad \Rightarrow \quad x^1 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$

Weiter gilt

$$Ax^1 = \lambda_1 x^1 \quad \Leftrightarrow \quad A\overline{x^1} = \overline{Ax^1} = \overline{\lambda_1 x^1} = \overline{\lambda_1} \cdot \overline{x^1} = \lambda_2 \overline{x^1} \quad \Rightarrow \quad x^2 = \overline{x^1} = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$$

,
d.h. ist x^1 komplexer Eigenvektor zum komplexen Eigenwert λ_1, so ist $x^2 = \overline{x^1}$ Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$.

Satz:

i) Sei $A \in \mathbb{R}^{N,N}$ symmetrisch, d.h. $A = A^T$. Dann sind alle Eigenwerte λ von A reell.

ii) Sei $A \in \mathbb{R}^{N,N}$ orthogonal, d.h. $A^{-1} = A^T$. Dann gilt für alle Eigenwerte $\lambda \in \mathbb{C}$ von A: $|\lambda| = 1$

iii) Sei $A \in \mathbb{R}^{N,N}$ idempotent, d.h. $A^2 = A$. Dann hat A die Eigenwerte $\lambda = 0$ oder $\lambda = 1$.

Satz: Sei $A \in \mathbb{R}^{N,N}$ symmetrisch.

i) Dann gibt es eine orthogonale Matrix O mit $= O \cdot A \cdot O^T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \lambda_2 & & & \\ & & \lambda_3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_N \end{pmatrix}$ und die $\lambda_1, \ldots, \lambda_N \in \mathbb{R}$ sind die Eigenwerte von A.

ii) A ist positiv (negativ) definit [semidefinit] genau dann, wenn $\lambda_i > 0 \quad (\lambda_i < 0) \quad [\lambda_i \geq 0] \quad [(\lambda_i \leq 0)]$ für $i = 1, \ldots, N$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
x^T A x &= x^T \cdot \underbrace{O^T \cdot O}_{I_N} \cdot A \cdot \underbrace{O^T \cdot O}_{I_N} \cdot x \\
&= \underbrace{(O \cdot x)^T}_{=y^T \text{ (Vektor)}} \cdot O \cdot A \cdot O^T \cdot \underbrace{O \cdot x}_{=y} \\
&= y^T \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \lambda_2 & & & \\ & & \lambda_3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_N \end{pmatrix} \cdot y \\
&= y^T \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 y_1 \\ \lambda_2 y_2 \\ \lambda_3 y_3 \\ \vdots \\ \lambda_N y_N \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \cdot y_i^2 = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \cdot [(O \cdot x)_i]^2 \\
&= \begin{cases} > 0 & \text{falls } \lambda_i > 0,\ i = 1, \ldots, N \\ < 0 & \text{falls } \lambda_i < 0,\ i = 1, \ldots, N \end{cases}
\end{aligned}$$

Beispiel: Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N,N}.$$

Wegen $A = A^T$ sind alle Eigenwerte reell. Ferner ist A positiv definit, da alle Hauptunterdeterminanten (vgl. Aufgabe 5, Blatt 2) positiv sind. Also gilt $\lambda > 0$ für alle Eigenwerte λ von A.