

ÜBUNGEN ZU Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler II

<https://www.math.uni-konstanz.de/~schropp/wiwimathss.html>

3. Übungsblatt

Aufgabe 1

Lösen Sie das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 4 & 1 & 2 \\ 8 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

mit der Cramerschen Regel.

Aufgabe 2

a) Gegeben sei die quadratische Form

$$Q(x) = 5x_1^2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 2x_2x_3 + 4x_3^2.$$

Bestimmen Sie zuerst die Matrix A mit $Q(x) = x^T Ax$ und untersuchen Sie Q auf positive bzw. negative Definitheit.

b) Analysieren Sie

$$Q(x) = -5x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - x_2^2 - 2x_3^2$$

unter den Nebenbedingungen

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0, \quad 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$$

auf Definitheit.

Aufgabe 3

Berechnen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}.$$

Normieren Sie die Eigenvektoren in der letzten Komponente auf 1.

Aufgabe 4

Es bezeichne

$$J_N = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & & & & & \\ c_1 & a_2 & b_2 & & & & \\ & c_2 & a_3 & b_3 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & c_{N-2} & a_{N-1} & b_{N-1} & \\ & & & & c_{N-1} & a_N & \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N,N}$$

die $(N \times N)$ -Jacobi Matrix.

a) Zeigen Sie: $|J_N| = a_N |J_{N-1}| - b_{N-1}c_{N-1} |J_{N-2}|$, $N \geq 3$.

b) Es sei $b_i = c_i = -1$ für $i = 1, \dots, 5$ und $a_i = i$, $i = 1, \dots, 6$. Berechnen Sie $|J_6|$.

Aufgabe 5

Es seien c_i , $i = 0, \dots, N - 1$ reelle Zahlen. Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & \\ & 0 & 1 & & & & \\ & & 0 & 1 & & & \\ & & & \ddots & \ddots & & \\ & & & & 0 & 1 & \\ -c_0 & -c_1 & \dots & \dots & -c_{N-2} & -c_{N-1} & \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N,N}.$$