Universität Konstanz *SS 2024*
Fachbereich Mathematik und Statistik
J. Schropp

Übungen zu
Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler II

https://www.math.uni-konstanz.de/∼schropp/wiwimathss.html

5. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Untersuchen Sie die Definitheit der quadratischen Form

$$Q(x,y,z) \;=\; x^2 - 4xy + y^2 - az^2 \text{ für } a > 0. \tag{1}$$

b) Analysieren Sie die Definitheit der Form Q aus (1) bezüglich der Nebenbedingung

$$B(x,y,z) \;=\; 4x - 2y + z \;= \text{¸}\, 0.$$

Aufgabe 2

Es sei

$$A \;=\; \begin{pmatrix} a & a & 0 \\ a & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}\backslash\{0\},\; b - a \neq 0,\; b - 2a \neq 0.$$

Berechnen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren von A.

Aufgabe 3

Vorgelegt sei die Funktion

$$f(x,y) \;=\; 8x^3 - 12xy + y^3, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

a) Untersuchen Sie f auf lokale Minima und Maxima.
b) Hat die Funktion

$$g(x,y) \;=\; (8x^3 - 12xy + y^3)^2$$

lokale Maxima?

Aufgabe 4

Es sei $A \in \mathbb{R}^{N,N}$ symmetrisch, und es sei $A = O\Lambda O^T$ mit einer orthogonalen Matrix $O \in \mathbb{R}^{N,N}$ und

$$\Lambda \;=\; \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_N \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N,N}$$

mit den Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N$ von A.
a) Berechnen Sie A^i für $i \in \mathbb{N}$.
b) Es sei nun $p(\lambda) = \sum_{i=0}^{N} a_i \lambda^i$ das charakteristische Polynom der Matrix A. Zeigen Sie:

$$a_0 I_N + a_1 A + a_2 A^2 + \ldots + a_N A^N \quad = \quad 0.$$

"Satz von Cayley-Hamilton"