FB MATHEMATIK UND STATISTIK
UNIVERSITÄT KONSTANZ
J. Schropp

SS 2024
31.7.2024

Klausur zu
Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler II (Ser. A)

- Zur Bearbeitung der Klausur sind 90 Minuten vorgesehen. Zugelassene Hilfsmittel sind das Skript auf der Website der Vorlesung, sowie ein persönlich handbeschriebenes DIN A4 Blatt. Alle weiteren Hilfsmittel wie z.B. Smartwatches, Smartphones, Tablets oder Taschenrechner sind verboten.
- Die Klausur besteht aus 3 Aufgaben. Für jede Aufgabe gibt es 14 Punkte. **Jede Antwort ist zu begründen.**
- Es wird nicht nur das Endergebnis, sondern auch Lösungswege und Zwischenschritte bewertet. Geben Sie daher bei jeder Aufgabe alle Zwischenschritte an.
- **Versehen Sie bitte jedes von Ihnen benutzte Blatt mit Ihrer Matrikelnummer.** Für jede Aufgabe ist eine neue Seite anzufangen. Es empfiehlt sich selbstverständlich, mit der Aufgabe zu beginnen, die einem am einfachsten erscheint.
- Füllen Sie bitte dieses Deckblatt in deutlicher Blockschrift aus, und geben Sie es am Ende der Klausur zusammen mit Ihren Lösungen ab.
- Alle Mitarbeiter/innen der Vorlesung wünschen Ihnen gutes Gelingen und viel Erfolg!

MATRIKELNUMMER:

PRÜFUNGSRAUM:

Hiermit stimme ich der Veröffentlichung meines Klausurergebnisses ohne Nennung des Namens zu.

______________________________ (Unterschrift)

1	**2**	**3**

Gesamtpunktzahl:	
Note:	

FB MATHEMATIK UND STATISTIK
UNIVERSITÄT KONSTANZ
J. Schropp

SS 2024
31.7.2024

Klausur zu
Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler II (Ser. A)

Aufgabe 1 14 Punkte

a) Vorgelegt sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit $A \in \mathbb{R}^{4,4}$ und $x, b \in \mathbb{R}^4$. Weiter sei $v \in Ker(A)$ für ein $v \in \mathbb{R}^4$, $v \neq 0$. Was kann aus diesen Informationen über $det(A)$, $rg(A)$, die Lösbarkeit und die Anzahl der Lösungen von $Ax = b$ gefolgert werden?

b) Begründen Sie, ob die folgenden Aussagen wahr sind oder geben Sie ein Gegenbeispiel an:

- Es sei $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$. Dann gilt $|z^5| = 5$.
- Seien $u(t)$, $v(t)$ Lösungen von $x'(t) = Ax(t)$, $A \in \mathbb{R}^{N,N}$. Dann ist auch $u(t) + 3v(t)$ eine Lösung von $x'(t) = Ax(t)$.
- Sei $A \in \mathbb{R}^{N,N}$, und es sei $det(A) = 1$. Dann ist A eine orthogonale Matrix.

c) Vorgelegt sei die Aufgabe

$$f(x) = max \text{ unter der Nebenbedingung } k(x) \geq 0 \qquad (1)$$

mit $f, k : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. Es sei x^* eine reguläre Lösung von (1) mit $k(x^*) = 0$ und Multiplikator $\mu^* > 0$. Was können Sie über die lineare Abhängigkeit von $\nabla f(x^*)$, $\nabla k(x^*)$ aussagen? Was können Sie über die Lösung x^* sagen, falls f, k zusätzlich konkav sind?

Aufgabe 2 14 Punkte

Betrachtet werde das Problem

$$f(x_1, x_2) \;=\; \ln(2x_2) - \frac{1}{x_1} \;=\; \max .$$

unter der Nebenbedingung $6 \geq x_1 + 2x_2$ für $x_1, x_2 > 0$. Geben Sie die Menge Z der zulässigen Punkte an und skizzieren Sie Z. Berechnen Sie alle möglichen relativen Extremwerte. Geben Sie eine Matrix an, an welcher entschieden werden kann, ob ein lokales Maximum unter Nebenbedingung vorliegt.

Aufgabe 3 14 Punkte

a) Es sei

$$Q(x_1, x_2) \;=\; \beta x_1^2 - 4x_2^2, \qquad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Für welche $\beta > 0$ ist die quadratische Form $Q(x_1, x_2)$ positiv definit unter der Nebenbedingung $x_1 + x_2 = 0$?

b) Vorgelegt sei die Aufgabe

$$x'(t) \;=\; Ax(t) + b \;=\; \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}. \qquad (2)$$

Welche zeitunabhängigen Lösungen hat (2)? Berechnen Sie die allgemeine Lösung $\bar{x}(t) = (\bar{x}_1(t), \bar{x}_2(t))$ der Aufgabe (2). Wie verhält sich $\bar{x}(t)$ für $t \to \infty$?

Hinweis: Es darf **ohne** Nachweis verwandt werden, dass A die Eigenwerte $\lambda_1 = -2 + i$, $\lambda_2 = -2 - i$ mit Eigenvektoren $v^1 = (-i, 1)^T$ und $v^2 = (i, 1)^T$ hat.