Universität Konstanz | WS 2004/2005
Fachbereich Mathematik und Statistik | 12. Februar 2005

Zweite Klausur zur Algebra (BIII)

- Stellen Sie sicher, daß Sie alle Aufgaben 1 bis 6 erhalten haben.
- Schreiben Sie sofort auf jedes Blatt Ihren Namen.
- Sie dürfen bis zu 90 Minuten schreiben.
- Als Hilfsmittel sind zwei handbeschriebene Merkblätter und Schreibzeug zugelassen.
- Verwenden Sie für jede Aufgabe nur das Blatt zur Lösung, auf dem die Aufgabe steht (falls nötig auch die Rückseite).

Es können maximal 32 Punkte erreicht werden. Viel Erfolg!

Name:

Aufgabe 1 (2 Punkte): Sei R ein Ring. Wieviele Elemente hat der Restklassenring $R/(0)$ von R nach dem Nullideal (0)? Entscheiden Sie sich für *eine* der folgenden vier Antworten! Markieren Sie diese mit einem Kreuz! Sie brauchen die Antwort nicht zu begründen.

☐ Er hat kein Element. ☐ Er hat genau ein Element.

☐ Er hat unendlich viele Elemente. ☐ Dies hängt von R ab.

Aufgabe 2 (6 Punkte): Welche der folgenden Aussagen ist für **jeden** Integritätsbereich R wahr (W), welche für **mindestens einen** Integritätsbereich R falsch (F)? Schreiben Sie hinter jede Aussage ein W oder ein F! Jede korrekte Antwort gibt einen Punkt. Für etwaige fehlerhafte Antworten gibt es keinen Punktabzug. Sie brauchen die Antwort nicht zu begründen.

(i) R ist faktoriell.
(ii) R ist in einem Körper enthalten.
(iii) R enthält einen Körper.
(iv) R hat genau ein minimales Primideal.
(v) R hat genau ein maximales Ideal.
(vi) Für jede multiplikative Menge $S \subseteq R$ mit $0 \notin S$ ist $S^{-1}R$ ein Integritätsbereich.

Name:

Aufgabe 3 (6 Punkte): Sei $d \in \mathbb{Z}$ eine quadratfreie Zahl $\neq 0$. Betrachten Sie den Ring

$$\mathbb{Z}[\sqrt{d}] = \{a + b\sqrt{d} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$$

und betrachten Sie die (laut Vorlesung wohldefinierte) Funktion

$$\tilde{N} \colon \mathbb{Z}[\sqrt{d}] \to \mathbb{Z} : a + b\sqrt{d} \mapsto |a^2 - b^2 d|.$$

Benutzen Sie im folgenden keine Tatsachen, die aus der Vorlesung generell über den Ring $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ bekannt sind.

(i) Rechnen Sie nach, daß $\tilde{N}$ ein Monoidhomomorphismus von $(\mathbb{Z}[\sqrt{d}], \cdot)$ nach $(\mathbb{Z}, \cdot)$ ist.

(ii) Charakterisieren Sie die Einheiten von $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ wie folgt:

$$(x \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]^\times \iff \tilde{N}(x) = 1) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}].$$

Lösung zur Aufgabe 3:

Name:

Aufgabe 4 (6 Punkte): Zeigen Sie, daß $\mathbb{C}[T]/(T^2)$ und $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ als Ringe **nicht** isomorph sind.

Aufgabe 5 (6 Punkte): Zeigen Sie, daß die Diedergruppe D_n auflösbar ist. Sie dürfen die in den Übungen bewiesene Tatsache benutzen, daß die Kommutatorgruppe $K(D_n)$ von d^2 erzeugt ist, wobei D_n von s und d mit $\mathrm{ord}(s) = 2$, $\mathrm{ord}(d) = n$ und $sd = d^{-1}s$ erzeugt wird.

Lösungen zu den Aufgaben 4 und 5:

Name:

Aufgabe 6 (6 Punkte): Sei K ein Körper. Zeigen Sie, daß im Ring der formalen Potenzreihen $K[[T]]$ über K in einer Unbestimmten T das von T erzeugte (Haupt-)Ideal (T)

(i) ein maximales Ideal

(ii) sogar das einzige maximale Ideal

ist. Benutzen Sie dabei Ihr Wissen über die Einheitengruppe $K[[T]]^{\times}$.

Lösung zur Aufgabe 6: