Universität Konstanz
 WS 2004/2005
Fachbereich Mathematik und Statistik
 17./18. November 2004

Erster Test zur Algebra (BIII)

- Stellen Sie sicher, daß Sie alle Aufgaben 1 bis 6 erhalten haben.
- Schreiben Sie sofort auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.
- Sie dürfen bis zu 45 Minuten schreiben.
- Als Hilfsmittel ist nur ein handbeschriebenes Merkblatt und Schreibzeug zugelassen.
- Verwenden Sie für jede Aufgabe nur das Blatt zur Lösung, auf dem die Aufgabe steht (falls nötig auch die Rückseite).
- Ergebnisse aus den Übungen dürfen **nicht** verwendet werden!

Es können maximal 32 Punkte erreicht werden. Viel Erfolg!

Name:
Matrikelnummer: **Übungsgruppe:**

Aufgabe 1 (2 Punkte): Sei G eine Gruppe. Wieviele Elemente hat die Restklassengruppe $G/\{1\}$ von G nach seinem Normalteiler $\{1\} \lhd G$? Entscheiden Sie sich für *eine* der folgenden vier Antworten! Markieren Sie diese mit einem Kreuz! Sie brauchen die Antwort nicht zu begründen.

☐ Sie hat kein Element. ☐ Sie hat ein Element.
☐ Sie hat unendlich viele Elemente. ☐ Dies hängt von G ab.

Aufgabe 2 (6 Punkte): Es bezeichne $\mathbb{Q}[T]$ den Polynomring in einer Unbestimmten T über den rationalen Zahlen und $(T-5)$ das von dem Polynom $T-5$ erzeugte Hauptideal in diesem Ring (bestehend aus allen Vielfachen von $T-5$ im Polynomring). Zeigen Sie, daß der Restklassenring $\mathbb{Q}[T]/(T-5)$ isomorph zu $\mathbb{Q}$ ist. Ist $\mathbb{Q}[T]/(T-5)$ ein Körper?

Lösung zur Aufgabe 2:

Name:
Matrikelnummer: **Übungsgruppe:**

Aufgabe 3 (6 Punkte): Finden Sie einen surjektiven, aber nicht injektiven Gruppenendomorphismus der multiplikativen Gruppe $\mathbb{C}^\times$ der komplexen Zahlen (Begründung!).

Aufgabe 4 (6 Punkte): Sei H eine nichttriviale Untergruppe der Gruppe G (also $\{1\} \subsetneq H \subsetneq G$), die *kein* Normalteiler von G ist. Zeigen Sie, daß es einen Automorphismus $\varphi : G \to G$ gibt mit $\varphi \neq \mathrm{id}_G$.

Lösungen zu den Aufgaben 3 und 4:

Name:
Matrikelnummer: **Übungsgruppe:**

Aufgabe 5 (6 Punkte): Gibt es einen Isomorphismus zwischen der additiven Gruppe $(\mathbb{C}, +)$ und der multiplikativen Gruppe $(\mathbb{C}^\times, \cdot)$ der komplexen Zahlen? Begründen Sie Ihre Aussage.

Aufgabe 6 (6 Punkte): Sei G die Untergruppe von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, die aus den regulären Diagonalmatrizen besteht, also

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0, b \neq 0 \right\} \subseteq \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}).$$

Ist G ein Normalteiler von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$?

Lösungen zu den Aufgaben 5 und 6: