Universität Konstanz Fachbereich Mathematik und Statistik

Übungsblatt 4 zur Linearen Algebra I

Wintersemester 2005/2006

Aufgabe 1: Für Vektoren $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ und $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ sei deren *Kreuzprodukt* definiert durch

$$v \times w := \begin{pmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{pmatrix}.$$

Seien $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

(a) $(v + u) \times w = (v \times w) + (u \times w)$

(b) $v \times (w + u) = (v \times w) + (v \times u)$

(c) $(\lambda v) \times w = \lambda(v \times w) = v \times (\lambda w)$

(d) $(v \times w) \perp v \quad \text{und} \quad (v \times w) \perp w$

(e) $\|v \times w\|^2 = \|v\|^2 \|w\|^2 - \langle v, w \rangle^2$

Aufgabe 2: Es seien x und y Vektoren im $\mathbb{R}^n$. Zeigen sie, daß x genau dann senkrecht auf y steht, wenn für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $\|x + \lambda y\| \geq \|x\|$.

Aufgabe 3: Zeigen Sie, daß es zu je drei Punkten im $\mathbb{R}^n$, die nicht auf einer Geraden liegen, höchstens eine Ebene gibt, die alle drei Punkte enthält.

Anleitung: Durch $u \in \mathbb{R}^n$ und die linear unabhängigen Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^n$ sei eine beliebige Ebene $E := \{u + \alpha v + \beta w \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ gegeben. Seien $x, y, z \in E$ nicht auf einer Geraden liegend. Zeigen Sie schrittweise:

(a) $E = \{x + \alpha v + \beta w \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

(b) $E = \{x + \alpha(y - x) + \beta w \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ oder
$E = \{x + \alpha(y - x) + \beta v \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

(c) $E = \{x + \alpha(y - x) + \beta(z - x) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

Aufgabe 4: Eine Gleichung der Form

$$a_1 X_1 + a_2 X_2 + \cdots + a_n X_n = 0$$

in den Unbekannten X_i mit Koeffizienten $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ nennt man eine komplexe homogene lineare Gleichung. Zeigen Sie: Wenn zwei n-Tupel $u, v \in \mathbb{C}^n$ genau dieselben komplexen homogenen linearen Gleichungen erfüllen, dann sind sie linear abhängig (über $\mathbb{C}$).

Hinweis: Zwei Vektoren u und v im $\mathbb{C}^n$ heißen linear abhängig, wenn einer ein skalares Vielfaches des anderen ist, das heißt, wenn es ein $\alpha \in \mathbb{C}$ gibt mit $u = \alpha v$ oder ein $\alpha \in \mathbb{C}$ gibt mit $v = \alpha u$. Vergleichen Sie mit Aufgabe 4 auf Blatt 3.

Abgabe bis Freitag, den 18. November, vor Beginn der Vorlesung.