Übungsblatt 6 zur Linearen Algebra I

Wintersemester 2005/2006

Aufgabe 1: Bestimmen Sie die Menge aller reellen 3×3-Matrizen mit folgenden Eigenschaften: Die Summe der Einträge der i-ten Zeile ist i (für $i \in \{1, 2, 3\}$). Die Summe der Einträge der j-ten Spalte ist j (für $j \in \{1, 2, 3\}$). Die Summe der Einträge auf der Diagonalen ist 0. Die Summe der Einträge auf der Nebendiagonalen ist ebenfalls 0.

Hinweis: Wenn in Ihrer Lösung die Zahl $-\frac{2}{3}$ keine Rolle spielt, haben Sie sich oder wir uns verrechnet.

Aufgabe 2: Sei K ein Körper und seien $x, y \in K^n$. Alle homogenen linearen Gleichungen, die von x erfüllt werden, seien auch von y erfüllt, das heißt für alle $a_1, \ldots, a_n \in K$ gelte

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0 \implies a_1y_1 + \cdots + a_ny_n = 0.$$

Zeigen Sie, daß y ein skalares Vielfaches von x ist, das heißt es gibt ein $\lambda \in K$ mit $y = \lambda x$.

Aufgabe 3: Betrachten Sie den $\mathbb{R}$-Vektorraum $V := \operatorname{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ aller Abbildungen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie, daß

$$U := \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid \text{es gibt nur endlich viele } n \in \mathbb{N} \text{ mit } f(n) \neq 0\}$$

ein Untervektorraum von V ist. Finden Sie zwei weitere Unterräume U_1 und U_2, so daß gilt $U \subsetneq U_1 \subsetneq U_2 \subsetneq V$ (hierbei stehe „$\subsetneq$" für das *echte* Enthaltensein).

Aufgabe 4: Betrachten Sie

$$U := \operatorname{Span}\{(2, 1, -3, 1, -1), (2, 0, 1, -2, 1), (1, -1, -2, 0, -2)\} \subseteq \mathbb{R}^5.$$

Finden Sie ein homogenes reelles lineares Gleichungssystem in fünf Unbestimmten und möglichst wenig Gleichungen, dessen Lösungsmenge U ist. (*Beweisen* Sie, daß es mit weniger Gleichungen nicht geht.)

Erste Klausur am 16. Dezember 2005 von 14 bis 16 Uhr im Audimax. Beachten Sie die Hinweise auf der Testklausur, die ab sofort im Internet unter der Adresse
`http://www.math.uni-konstanz.de/~schweigh/lehre/`
heruntergeladen werden kann und als Kopiervorlage neben dem Raum F405 aushängt.

Abgabe bis Freitag, den 2. Dezember, vor Beginn der Vorlesung.