

Übungsblatt 8 zur Linearen Algebra I

Wintersemester 2005/2006

Aufgabe 1: Es seien $f : A \rightarrow B$ und $g : B \rightarrow C$ Abbildungen. Man definiert die *Verkettung* (oder *Hintereinanderschaltung*) $g \circ f : A \rightarrow C$ (lies „ g nach f “) durch $(g \circ f)(a) := g(f(a))$ für alle $a \in A$. Zeigen Sie:

- (a) Ist $C = A$ und gilt $g \circ f = \text{id}_A$, so sind f injektiv und g surjektiv. Seien nun zusätzlich A , B und C K -Vektorräume.
- (b) Sind f und g K -linear, so auch $g \circ f$.
- (c) Sind $A = C$, $g \circ f = \text{id}_A$ und ist $f : A \rightarrow B$ ein Isomorphismus, so ist auch $g : B \rightarrow A$ ein Isomorphismus.
- (d) Sind $f : A \rightarrow B$ und $g : B \rightarrow C$ Isomorphismen, so ist auch $g \circ f : A \rightarrow C$ ein Isomorphismus.

Aufgabe 2: Welche der folgenden Aussagen sind sinnvoll? Welche sind richtig, welche sind falsch? Begründen Sie Ihre Antworten! Für alle Körper K , für alle $m \times n$ -Matrizen A und alle $n \times r$ -Matrizen B mit Einträgen aus K gilt

- (a) ${}^t(AB) = ({}^tA)({}^tB)$ (b) ${}^t(AB) = ({}^tB)({}^tA)$
 (c) ${}^t(BA) = ({}^tA)({}^tB)$ (d) ${}^t(BA) = ({}^tB)({}^tA)$

Aufgabe 3: Berechnen Sie die folgenden Matrizenprodukte:

- (a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$ für beliebiges $n \in \mathbb{N}$
- (b) $\begin{pmatrix} 1+i & 1 & -i \\ 2+i & -2i & -1 \\ i & -i & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-i & 0 \\ 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$

Aufgabe 4: Sei K ein Körper und U ein Unterraum des K -Vektorraums K^n der Dimension r . Zeigen Sie, daß es paarweise verschiedene $j_1, \dots, j_r \in \{1, \dots, n\}$ gibt, so daß die Abbildung

$$f : U \rightarrow K^r : (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_{j_1}, \dots, x_{j_r})$$

ein Isomorphismus ist.

Hinweis: Fassen Sie die Elemente von K^n (entgegen der Konvention aus der Vorlesung) als Zeilenvektoren auf und schreiben Sie U als Zeilenraum einer Matrix. Diese Matrix läßt sich in „Stufenform“ überführen.

Abgabe bis Freitag, den 16. Dezember, vor Beginn der Vorlesung.