Übungsblatt 1 zur Reellen Algebra (B IV)

Sommersemester 2005

Aufgabe 1: Sei $(K, \leq)$ ein archimedisch angeordneter Körper und $\varrho : K \to \mathbb{R}$ die in der Vorlesung definierte Abbildung, die jedem Element $a \in K$ die eindeutig bestimmte reelle Zahl $\varrho(a) \in \mathbb{R}$ zuordnet mit $\varrho(U_a) \leq \varrho(a) \leq \varrho(O_a)$, wobei

$$U_a := \{s \in \mathbb{Q} \mid s < a\} \qquad \text{und} \qquad O_a := \{r \in \mathbb{Q} \mid a \leq r\}.$$

Zeigen Sie, daß ϱ ein Ringhomomorphismus ist.

Aufgabe 2: Zeigen Sie, daß der Ring $\mathbb{R}((X))$ der formalen Potenzreihen $\sum_{i=m}^{\infty} a_i X^i$ (X eine Unbestimmte, $m \in \mathbb{Z}$, $a_i \in \mathbb{R}$) ein Körper ist und genau zwei Anordnungen besitzt.

Hinweis: Zeigen Sie, daß alle Potenzreihen der Form $1 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i X^i$ ($a_i \in \mathbb{R}$) invertierbare Quadrate in $\mathbb{R}((X))$ sind.

Aufgabe 3: Ein angeordneter Körper $(K, \leq)$ heißt

(a) *schnittvollständig*, wenn es zu beliebigen nichtleeren Teilmengen U und O von K mit $U \leq O$ immer ein $a \in K$ gibt mit $U \leq a \leq O$,

(b) *archimedisch*, wenn es zu jedem $a \in K$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit $a \leq N$,

(c) *vollständig*, wenn jede Cauchy-Folge in K konvergiert (Definition von Cauchy-Folge und Konvergenz, wie in $\mathbb{R}$ außer, daß $\varepsilon, \delta > 0$ jetzt in K sind statt in $\mathbb{R}$).

Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

(i) $(K, \leq)$ ist schnittvollständig.

(ii) $(K, \leq)$ ist archimedisch und vollständig.

Abgabe bis Donnerstag, den 21. April, vor der Vorlesung.