Übungsblatt 5 zur Reellen Algebra (B IV)

Sommersemester 2005

Aufgabe 1: Das erste explizite Beispiel eines nichtnegativen Polynoms, welches keine Quadratsumme von Polynomen ist, wurde erst 1967 von Motzkin angegeben:

$$f := X^4Y^2 + X^2Y^4 - 3X^2Y^2 + 1 \in \mathbb{R}[X,Y]$$

Zeigen Sie
(a) $f \geq 0$ auf $\mathbb{R}^2$
(b) Für kein $N \in \mathbb{N}$ ist $f + N$ eine Quadratsumme in $\mathbb{R}[X,Y]$.

Aufgabe 2: Für $n \in \mathbb{N}$ sei das Polynom

$$f_n := \sum_{i=1}^{n} \prod_{j \neq i} (X_i - X_j) \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$$

gegeben. Für welche $n \in \mathbb{N}$
(a) gilt $f_n \geq 0$ auf $\mathbb{R}^n$?
(b) ist f_n eine Quadratsumme in $\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$?
Frage (a) stammt aus der bisher wohl schwersten internationalen Mathematik-Olympiade 1971 in der ČSSR.

Aufgabe 3: Teilmengen des $\mathbb{R}^n$, die sich durch endlich viele strikte polynomiale Ungleichungen definieren lassen, nennt man *basisoffene* semialgebraische Mengen. Dies sind also genau die Mengen der Form

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid g_1(x) > 0, \ldots, g_m(x) > 0\} \qquad (m \in \mathbb{N}, g_i \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]).$$

Zeigen Sie, daß die aufgeschlitzte Kreisscheibe

$$\{re^{i\varphi} \mid 0 < r < 1, 0 < \varphi < 2\pi\} \subseteq \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$$

keine basisoffene semialgebraische Menge ist, sehr wohl aber Vereinigung zweier solcher.

Aufgabe 4: Zeigen Sie, daß es kein Polynom $f \in \mathbb{R}[X,Y]$ gibt mit

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) > 0\}.$$

Abgabe bis Freitag, den 27. Mai, um 12 Uhr.