Übungsblatt 2 zur Algebra

Wintersemester 2006/2007

Aufgabe 1: Sei G eine endliche Gruppe. Zeigen Sie:

(a) Ist H eine p–Sylow–Untergruppe von G, so ist H genau dann ein Normalteiler von G, wenn H die *einzige* p–Sylow–Untergruppe von G ist.

(b) Gibt es Primzahlen p und q mit $|G| = pq^2$, so besitzt G eine p– oder q–Sylow–Untergruppe, die ein Normalteiler von G ist.

Aufgabe 2: Sei G eine endliche Gruppe und p die kleinste Primzahl, die $|G|$ teilt. Es sei H eine Untergruppe von G und die Menge $X := \{gH \mid g \in G\}$ der Linksnebenklassen von H habe genau p Elemente. Zeigen Sie, daß H ein Normalteiler von G ist.

Hinweis: Der Fall $p = 2$ ist besonders einfach. Im allgemeinen Fall betrachte man die kanonische Gruppenoperation von G auf X. Durch diese wird der Gruppenhomomorphismus

$$\varphi : G \to S_X : g \mapsto (x \mapsto gx)$$

von G in die Gruppe S_X der Permutationen von X vermittelt. Es gilt $H = \text{Kern } \varphi$. Um $H \subseteq \text{Kern } \varphi$ zu zeigen, überlege man sich, daß die Bahnen der Gruppenoperation von H auf X entweder 1 oder p Elemente haben und schließe letzteres aus.

Aufgabe 3: Zeigen Sie, daß je zwei m–Zykel in S_n konjugiert sind und bestimmen Sie die Anzahl der n–Zykel in S_n.

Aufgabe 4: Zeigen Sie, daß $(1\ 2)$ und $(1\ 2\ 3\ 4\ \ldots\ n)$ die Gruppe S_n erzeugen.

Abgabe bis Donnerstag, den 2. November, vor der Vorlesung.