Übungsblatt 6 zur Linearen Algebra II

Sommersemester 2006

Aufgabe 1: Bestimmen Sie eine Basis des von

(a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ erzeugten $\mathbb{Z}$–Moduls $M \subseteq \mathbb{Z}^3$

(b) $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ erzeugten $\mathbb{Z}$–Moduls $M \subseteq \mathbb{Z}^2$.

Aufgabe 2: Zeigen Sie, daß der Polynomring über den ganzen Zahlen

$$\mathbb{Z}[X] = \{a_n X^n + \cdots + a_0 \mid n \in \mathbb{N}_0, a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{Q}[X]$$

kein Hauptidealring ist.

Hinweis: Betrachten Sie das von 2 und X in $\mathbb{Z}[X]$ erzeugte Ideal.

Aufgabe 3: Sei A ein kommutativer Ring mit 1, M ein A–Modul. Zeigen Sie für jedes Ideal I von A:

(a) $L := \{a_1 y_1 + \cdots + a_m y_m \mid m \in \mathbb{N}_0, a_1, \ldots, a_m \in I, y_1, \ldots, y_m \in M\}$ ist ein Untermodul von M.

(b) Der A–Modul M/L wird vermöge der durch

$$(a + I)(x + L) := ax + L \qquad \text{für } a \in A \text{ und } x \in M$$

(wohl?)definierten Multiplikation mit Skalaren zu einem A/I–Modul.

(c) Ist M ein freier A–Modul mit Basis $x_1, \ldots, x_n$, so ist M/L ein freier A/I–Modul mit Basis $x_1 + L, \ldots, x_n + L$.

Sei nun $A \neq \{0\}$. Folgern Sie durch geschickte Wahl von I:
Sind $x_1, \ldots, x_n$ und $x'_1, \ldots, x'_{n'}$ Basen von M, so gilt $n = n'$.

Erste Klausur am Samstag, den 24. Juni, von 10 bis 12 Uhr in den Räumen R711 und R712. Anmeldung ist unbedingt erforderlich und erfolgt in den Übungsgruppen spätestens am 12./13. Juni.

Abgabe bis Freitag, den 9. Juni, vor Beginn der Vorlesung.