Lösungsvorschlag zur Aufgabe 1: (a) Es gilt

$$\begin{aligned} P_A = \det(A - TI) &= \det \begin{pmatrix} -1-T & -4 \\ 1 & 3-T \end{pmatrix} \\ &= (T+1)(T-3)+4 = T^2 - 2T + 1 = (T-1)^2. \end{aligned}$$

(b) Die Matrix A ist genau dann diagonalisierbar, wenn die Vielfachheit eines jeden Eigenwertes von A in P_A übereinstimmt mit der Dimension des zugehörigen Eigenraumes. Nach (a) ist 1 der einzige Eigenwert von A und dieser hat Vielfachheit 2 in P_A. Daher ist A diagonalisierbar genau dann, wenn der Eigenraum zum Eigenwert 1 zweidimensional ist. Dieser Eigenraum ist aber der Kern der Matrix $B := A - I = \det \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Da diese Matrix den Rang 1 hat, ist ihr Kern eindimensional. Also ist A nicht diagonalisierbar.

(c) Nach (a) kommen nur die Einheitsmatrix und $J := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ als Jordansche Normalform für A in Frage. Nach (b) scheidet aber die Einheitsmatrix aus, da sie eine Diagonalmatrix ist. Also ist J die einzige Jordansche Normalform von A.

(d) Wir zeigen $J^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}$ durch Induktion nach $n \in \mathbb{N}$. Der Induktionsanfang $n = 0$ ist trivial. Sei die Behauptung für ein $n \in \mathbb{N}$ bereits gezeigt. Dann gilt

$$J^{n+1} = J^n J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n+1 & 1 \end{pmatrix},$$

wobei die zweite Gleichheit nach Induktionsvoraussetzung gilt.

(e) Wir bestimmen zunächst eine Basis $\mathfrak{v} = (v_1, v_2)$ des $\mathbb{R}^2$ so, daß

$$(*) \qquad M_{\mathfrak{v}}^{\mathfrak{v}}(L(A)) = J.$$

Offensichtlich gilt

$$\begin{aligned} (*) \iff & Av_1 = v_1 + v_2 \text{ und } Av_2 = v_2 \\ \iff & Bv_1 = v_2 \text{ und } Bv_2 = 0 \\ \iff & Bv_1 = v_2 \text{ und } B^2 v_1 = 0 \\ \iff & Bv_1 = v_2, \end{aligned}$$

wobei die letzte Äquivalenz daraus folgt, daß ohnehin $B^2 = 0$ gilt, denn B ist ja ähnlich zu $J - I$ (da nach (c) A ähnlich zu J ist) und offensichtlich gilt $(J - I)^2 = 0$. Wir raten nun v_1, etwa $v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und setzen $v_2 := Bv_1 == \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Offensichtlich ist $\mathfrak{v} := (v_1, v_2)$ dann eine Basis des $\mathbb{R}^2$ mit $(*)$.

Bezeichnet $\mathfrak{e}$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^2$, so gilt

$$M_{\mathfrak{e}}^{\mathfrak{v}}(\mathrm{id}) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad M_{\mathfrak{v}}^{\mathfrak{e}}(\mathrm{id}) = M_{\mathfrak{e}}^{\mathfrak{v}}(\mathrm{id})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und $A = M_{\mathfrak{e}}^{\mathfrak{e}}(L(A)) = M_{\mathfrak{e}}^{\mathfrak{v}}(\mathrm{id}) M_{\mathfrak{v}}^{\mathfrak{v}}(L(A)) M_{\mathfrak{v}}^{\mathfrak{e}}(\mathrm{id})$. Daher ist

$$P := M_{\mathfrak{v}}^{\mathfrak{e}}(\mathrm{id})(L(A)) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

eine Matrix mit $A = P^{-1}JP$.

(f) Aus (e) folgt sofort $A^n = P^{-1}J^nP$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Mit (d) erhält man daraus für $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} A^n &= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1-2n & -2 \\ n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2n & -4n \\ n & 2n+1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Lösungsvorschlag zur Aufgabe 2: Sei J eine Jordansche Normalform von A. Da A und J ähnlich sind, haben A und J dasselbe charakteristische Polynom. Da aber J Dreiecksgestalt hat, ist $\prod_{i=1}^{6}(T - \lambda_i)$ das charakteristische Polynom von J, wenn $\lambda_1, \ldots, \lambda_6$ die Diagonaleinträge von J sind. Also erhält man, daß die Diagonaleinträge von J nacheinander lauten: $2, 2, 2, 2, -5, -5$ oder $-5, -5, 2, 2, 2, 2$.

Wieder wegen der Ähnlichkeit von A und J, stimmen die Dimensionen der Eigenräume zu den jeweiligen Eigenwerten von A und J überein. Zum Eigenwert -5 hat J entweder ein oder zwei Jordankästchen. Hätte es zwei, so wäre der Eigenraums zum Eigenwert -5 offensichtlich zweidimensional. Also hat J nur ein Jordankästchen zum Eigenwert -5, und dieses muß die Größe 2 haben. Beim Eigenwert 2 ist die Lage ein bißchen komplizierter: Wir wissen $2 = \dim\ker(A - 2I) = \dim\ker(J - 2I) = 6 - \mathrm{rk}(J - 2I) = 6 - (2 + m) = 4 - m$, wobei m die Anzahl der Einsen unter der Diagonale bezeichne, die von den Jordankästchen zum Eigenwert 2 kommen (die Matrix $J - 2I$ ist in Zeilenstufenform, ihr Rang ist also die Anzahl der Stufen). Es folgt $m = 4 - 2 = 2$. Damit kann es zum Eigenwert 2 entweder ein Kästchen der Größe 3 und eines der Größe 1 oder zwei Kästchen der Größe 2 geben.

Insgesamt folgt, daß A ähnlich ist zu einer der folgenden beiden Matrizen in Jordanscher Normalform:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

Umgekehrt kommen diese beiden Matrizen wirklich in Frage, denn sie haben selber alle Eigenschaften, von denen wir wissen, daß A sie hat, und damit könnte A eine dieser beiden Matrizen sein.

Lösungsvorschlag zur Aufgabe 3: Zu (c): Es gilt $f = (T-1)^2 + 3$. Daher hat f keine reelle Nullstelle. Das Polynom g hat als Polynom ungeraden Grades hingegen eine reelle Nullstelle. Schließlich gilt für $h(x) = x^4 + 6x^2 + 5 \geq 5$ für $x \in \mathbb{R}$, womit h keine reelle Nullstelle hat.

Zu (a): Wäre f reduzibel in $\mathbb{R}[T]$, so müßte es aus Gradgründen in zwei Linearfaktoren in $\mathbb{R}[T]$ zerfallen und hätte dann natürlich eine Nullstelle im Widerspruch zu (c). Also ist f irreduzibel. Da g nach (c) eine Nullstelle hat, kann man einen Linearfaktor abspalten und g ist damit reduzibel. Um h zu untersuchen, betrachten wir zunächst das Polynom $h' := T^2 + 6T + 5$. Es gilt $h(-1) = 0$, womit h' reduzibel ist und sich daher schreiben läßt als $h' = pq$ mit Polynomen $p, q \in \mathbb{R}[T] \backslash \mathbb{R}$. Nun gilt $h = h'(T^2) = p(T^2)q(T^2)$, womit auch h reduzibel ist.

Zu (b): Da $\mathbb{R}[T]$ ein euklidischer Ring ist, ist es ein Hauptidealbereich und damit faktoriell. Insbesondere ist nach Vorlesung ein Element $\neq 0$ von $\mathbb{R}[T]$ genau dann irreduzibel, wenn es prim ist. Nach (a) ist also f prim während g und h nicht prim sind.

Lösungsvorschlag zur Aufgabe 4: Es gibt hier eine Unzahl an Lösungsmöglichkeiten. Hier eine besonders systematische:

Hilfsbehauptung 1: Sind $A : V \to W$ und $B : W \to Z$ lineare Operatoren zwischen normierten $\mathbb{R}$-Vektorräumen, so gilt $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$.

Beweis: Ist $x \in V$, so gilt nach Vorlesung $\|(AB)x\| = \|A(Bx)\| \leq \|A\|\|Bx\| \leq \|A\|\|B\|\|x\|$. Aus der Definition von $\|AB\|$ folgt dann die Behauptung.

Hilfbehauptung 2: Ist A eine symmetrische reelle Matrix und $\|A\|$ ihre Operatornorm, so gilt $\|A\| = \max\{|\lambda| \mid \lambda \text{ ist Eigenwert von } A\}$.

Beweis: Da A symmetrisch ist, gibt es eine reelle orthogonale Matrix P und eine reelle Diagonalmatrix D mit $A = P^T DP$, wobei P^T die Transponierte von P bezeichne. Auch P^T ist dann orthogonal. Da orthogonale Matrizen die Norm erhalten, gilt offensichtlich $\|P\| = \|P^T\| = 1$. Aus Hilfsbehauptung 1 folgt $\|A\| \leq \|P^T\|\|D\|\|P\| = \|D\|$ und wegen $D = PAP^T$ analog $\|D\| \leq \|A\|$, also insgesamt $\|A\| = \|D\|$. Die Diagonaleinträge von D sind gerade die Eigenwerte von A. Ohne Einschränkung stehe dabei der Eigenwert λ mit dem größten Absolutbetrag $|\lambda|$ links oben. Offensichtlich gilt $\|D\| \leq \|\lambda I\| \leq |\lambda|\|I\| = |\lambda|$. Andererseits gilt $\|De_1\| = |\lambda| = |\lambda|\|e_1\|$, was $\|D\| \geq |\lambda|$ zeigt. Insgesamt erhalten wir $\|A\| = \|D\| = |\lambda|$.

Aus den beiden Hilfsbehauptungen erhält man nun das Ergebnis: Das charakteristische Polynom von A ist $(1-T)^2 - 4 = T^2 - 2T - 3 = (T+1)(T-3)$. Daher ist $\|A\| = \max\{|-1|, |3|\} = 3$.

Auch wer „nur“ die Sätze aus der Vorlesung anwenden kann, soll Punkte bekommen: Aus der Vorlesung wissen wir, daß für einen kompakten selbstadjungierten Operator A auf einem Hilbertraum

$\neq \{0\}$ stets $\|A\|$ oder $-\|A\|$ ein Eigenwert von A ist. Die gegebene symmetrische Matrix A kann man natürlich als selbstadjungierten Operator auf dem Hilbertraum $\mathbb{R}^3$ auffassen. Also ist $\|A\| = 3$ oder $\|A\| = 1$. In jedem Fall $\|A\| \leq 3$. **Für solch eine obere Abschätzung gibt es schon Punkte.** Aber man kann jetzt natürlich auch leicht $\|A\| = 3$ schließen, da $\|Ae_1\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{5} \not\leq 1 = \|e_1\|$.

Lösungsvorschlag zur Aufgabe 5: Betrachte die Funktion

$$f : V \to \mathbb{R}, \ (a_i)_{i \in \mathbb{N}} \mapsto \lim_{i \to \infty} a_i.$$

Nach den Rechenregeln für Limites gilt $f \in V^*$.

Annahme: $f \in U$. Dann gibt es $n \in \mathbb{N}$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ mit $f = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i f_i$. Daraus folgt für jede konvergente reelle Folge $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$

$$\lim_{i \to \infty} a_i = \left(\sum_{i=0}^{n} \lambda_i f_i \right) ((a_i)_{i \in \mathbb{N}}) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i f_n((a_i)_{i \in \mathbb{N}}) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i a_i,$$

was natürlich völlig absurd ist: Nimmt man zum Beispiel die konvergente Folge gegeben durch $\{a_0, \ldots, a_n\} = \{0\}$ und $\{a_{n+1}, a_{n+2}, ...\} = \{1\}$, so folgt $1 = 0$.

Da die Annahme widersprüchlich ist, gilt $f \notin U$, also $f \in V^* \setminus U$. Daher $U \neq V^*$.

Lösungsvorschlag zur Aufgabe 6:

- Unterschied zwischen Basis und Orthonormalbasis:
  - Der Begriff „Basis“ macht Sinn für beliebige Vektorräume, der Begriff „Orthonormalbasis“ nur für Vektorräume mit Skalarprodukt (also Prähilberträume, d.h. euklidische oder unitäre Räume).
  - Eine Orthonormalbasis ist eine Basis, in der die Vektoren zusätzlich paarweise senkrecht zueinander stehen und auf der Einheitskugel liegen.
- Unterschied zwischen Basis und Hilbertbasis:
  - Der Begriff „Basis“ macht Sinn für beliebige Vektorräume, der Begriff „Hilbertbasis“ nur für Vektorräume mit Skalarprodukt.
  - Eine Basis muß den ganzen Vektorraum erzeugen. Eine Hilbertbasis muß nur einen dichten Unterraum erzeugen.
  - In einer Hilbertbasis müßen die Vektoren zusätzlich paarweise senkrecht zueinander stehen und auf der Einheitskugel liegen.
- Unterschied zwischen Orthonormalbasis und Hilbertbasis:
  - Im Gegensatz zu einer Hilbertbasis ist eine Orthonormalbasis immer eine Basis.
  - Jede Orthonormalbasis ist eine Hilbertbasis, aber nicht umgekehrt.