Universität Konstanz Fachbereich Mathematik und Statistik
Vordiploms- und Zwischenprüfung in Linearer Algebra I und II
21. Oktober 2006

Lösungsvorschlag zur Aufgabe 1: (a) Eine Abbildung $f : V \to W$ ist per Definition genau dann linear, wenn für alle $v, w \in V$ und $\lambda \in K$ gilt $f(v + w) = f(v) + f(w)$ und $f(\lambda v) = \lambda f(v)$.

(b) Um eine lineare Abbildung $f : V \to W$ mit Hilfe einer Matrix darzustellen, braucht man zunächst Basen $\mathfrak{v} = (v_1, \dots, v_n)$ von V und $\mathfrak{w} = (w_1, \dots, w_m)$ von W. Die Matrix A, die f bezüglich $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{w}$ darstellt, hat m Zeilen und n Spalten und ihre Einträge sind aus dem Körper K. In der j-ten Spalte stehen die Koordinaten von $f(v_j)$ bezüglich $\mathfrak{w}$. Ist $v \in V$ gegeben, so erhält man den Koordinatenvektor von $f(v)$ bezüglich $\mathfrak{w}$, indem man A mit dem Koordinatenvektor von v bezüglich $\mathfrak{v}$ multipliziert.

Lösungsvorschlag zur Aufgabe 2: (a) $(*)$ ist lösbar genau dann, wenn b im Bild von f liegt.

(b) Die fragliche Bedingung besagt, daß A und $(A\ b)$ denselben Rang haben. Wir zeigen die Äquivalenz zur Lösbarkeit der Gleichung $(*)$:

Sei zunächst $(*)$ lösbar. Dann ist b eine Linearkombination der Spalten von A. Also ist der Spaltenraum von $(A\ b)$ gleich dem Spaltenraum A. Insbesondere stimmen die Dimensionen dieser beiden Spaltenräume überein, also die (Spalten-)Ränge von A und $(A\ b)$.

Umgekehrt seien die Ränge von A und von $(A\ b)$ gleich. Der Spaltenraum U von A ist dann ein Unterraum des (natürlich endlichdimensionalen) Spaltenraums W von $(A\ b)$ mit $\dim(U) = \dim(W)$. Damit gilt $b \in W = U$. Somit ist b eine Linearkombination der Spalten von A, womit $(*)$ lösbar ist.

(c) Die Gleichung $(*)$ ist universell lösbar genau dann, wenn f surjektiv ist.

(d) Eine Matrix A, für die $(*)$ universell lösbar ist, gibt es genau dann, wenn $m \leq n$. Wegen (c) muß man dazu nur zeigen, daß es eine surjektive lineare Abbildung $f : K^n \to K^m$ genau dann gibt, wenn $m \leq n$. Dies ist aber klar: Da das Bild von f höchstens die Dimension n hat, kann für $m > n$ f nicht surjektiv sein. Ist $m \leq n$, so kann man umgekehrt eine surjektive lineare Abbildung f definieren, indem man Basen $\mathfrak{v} = (v_1, \dots, v_n)$ und $\mathfrak{w} = (w_1, \dots, w_m)$ definiert und f zum Beispiel festlegt durch $v_i \mapsto w_i$ für $i \in \{1, \dots, m\}$ und $v_i \mapsto 0$ für $i \in \{m + 1, \dots, n\}$.

Lösungsvorschlag zur Aufgabe 3: Die Matrix A ist symmetrisch und daher nach Vorlesung diagonalisierbar.

Das charakteristische Polynom der Matrix B ist $(1-T)(4-T)-6 = T^2 - 5T - 2$. Wegen $(-5)^2 - 4(-2) = 25 + 8 > 0$ hat dieses Polynom zwei verschiedene reelle Nullstellen. Es zerfällt also und die Vielfachheit der Eigenwerte ist jeweils gleich der Dimension des zugehörigen Eigenraums (denn diese Vielfachheit ist in diesem Fall ja 1 und allgemein immer größer oder gleich dieser Dimension). Damit ist das Kriterium für Diagonalisierbarkeit aus der Vorlesung erfüllt. B ist also diagonalisierbar.

Die Matrix C ist keine Diagonalmatrix und andererseits aber in Jordanscher Normalform. Damit kann sie nicht diagonalisierbar sein. Denn sonst gäbe es zwei Matrizen in Jordanscher Normalform (nämlich C und eine zu C ähnliche Diagonalmatrix), die ähnlich sind, und von denen eine zwei und eine drei Jordankästchen hat. Dies ist nicht möglich, da die Jordansche Normalform bis auf Permutierung der Jordankästchen eindeutig ist.

Lösungsvorschlag zur Aufgabe 4: (a) Da A symmetrisch ist, ist A diagonalisierbar.

(b) Der Rang von A ist offensichtlich 1, da die erste Zeile den Zeilenraum aufspannt (und nicht null ist).

(c) Die Spur ist offensichtlich 6 und die Determinante 0, da die Matrix A eine Nullzeile enthält.

(d) Nach (a) ist A ähnlich zu einer Diagonalmatrix D. Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_5$ die Diagonaleinträge von D. Im Folgenden benutzen wir, daß das charakteristische Polynom (insbesondere Spur, Determinante und Eigenwerte) sowie der Rang für A und für D dieselben sind (denn all diese Begriffe sind laut Vorlesung invariant unter Ähnlichkeit). Da A (und daher also auch D) nach (b) den Rang 1 hat, gilt nach eventueller Umnumerierung der λ_i, daß $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 0$. Die Spur von A (oder von D) ist daher gleich λ_1, womit aus (c) folgt $\lambda_1 = 6$. Da D eine Diagonalmatrix ist, kann man daraus sofort das charakteristische Polynom von D ablesen: $(6 - T)(-T)^4 = -T^5 + 6T^4$. Die Eigenwerte von A sind also 6 (einfach) und 0 (fünffach).

(e) Das charakteristische Polynom von A ist gleich dem von D, also nach (d) gleich $-T^5 + 6T^4$.

Lösungsvorschlag zur Aufgabe 5: Wir können A durch eine Matrix auswechseln, die zu A ähnlich ist, ohne das charakteristische Polynom zu ändern. Wir können daher annehmen, daß A in der reellen Normalform für orthogonale Matrizen vorliegt. Gäbe es kein 2×2-Drehkästchen in A, so wäre A eine Diagonalmatrix mit Diagonaleinträgen ± 1. Da A eine 3×3-Matrix ist, könnte dann aber die Spur unmöglich 0 sein. Somit muß A ein 2×2-Drehkästchen beinhalten, ist also ohne Einschränkung von der Form

$$A = \begin{pmatrix} \pm\delta 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

für ein $\delta \in \{-1, 1\}$ und ein $\alpha \in \mathbb{R}$. Offensichtlich gilt $\delta = \det A = 1$ und $1 + 2\cos(\alpha) = \mathrm{tr} A = 0$, also $\cos(\alpha) = -\frac{1}{2}$. Für das charakteristische

Polynom von A erhält man nun

$$\begin{aligned}(1-T)((\cos\alpha - T)^2 + (\sin\alpha)^2) &= (1-T)(T^2 - 2(\cos\alpha)T + 1)\\ &= (1-T)(T^2+T+1) = -T^3+1.\end{aligned}$$

Lösungsvorschlag zur Aufgabe 6: Es gilt $T^6 - T^5 = T^5(1-T)$. Die Eigenwerte von A sind also 0 (fünffach) und 1 (einfach). Also gibt es eine Jordansche Normalform J von A, deren Diagonaleinträge nacheinander $1, 0, 0, 0, 0, 0$ lauten. Es gibt also ein Jordankästchen der Größe 1. Da A (und damit J) laut Voraussetzung den Rang 2 hat, muß offensichtlich (Rang kann man aus Zeilenstufenform ablesen!) in J genau einmal eine Eins unterhalb der Diagonale auftauchen. Folglich gibt es zum Eigenwert 0 genau ein Jordankästchen der Größe 2 und 3 Jordankästchen der Größe 1, also etwa

$$J = \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}.$$

Lösungsvorschlag zur Aufgabe 7: Nach dem Kriterium aus der Vorlesung ist A positiv definit, denn

$$\det\begin{pmatrix} 6&2&2\\ 2&4&6\\ 2&6&10 \end{pmatrix} = 240+24+24-16-216-40 > 0,$$

$$\det\begin{pmatrix} 6&2\\ 2&4 \end{pmatrix} > 0 \qquad \text{und} \qquad \det(6) > 0.$$

Lösungsvorschlag zur Aufgabe 8: (a) Nach Vorlesung ist jeder euklidische Integritätsring ein Hauptidealbereich und jeder Hauptidealbereich faktoriell. Nun ist aber ein Polynomring in einer Variablen über einem Körper euklidisch (wegen der Möglichkeit der Polynomdivision mit Rest).

(b) Das Polynom $p_1 = (X^2+X+1)(X^2-X+1)$ ist reduzibel über $\mathbb{R}$ (das heißt, in $\mathbb{R}[X]$).

Das quadratische Polynom p_2 hat keine reelle Nullstelle und ist daher irreduzibel über $\mathbb{R}$.

Wäre das Polynom p_3 reduzibel über $\mathbb{Q}$, so müßte es eine rationale Nullstelle haben (denn es kann ja als kubisches Polynom nur entweder in drei Linearfaktoren oder einen irreduziblen quadratischen und einen Linearfaktor zerfallen, und in beiden Fällen liefert der Linearfaktor eine Nullstelle). Gäbe es aber $p, q \in \mathbb{Z}$ mit $q \neq 0$ und $p_3(\frac{p}{q}) = 0$, so folgte $p^3 = 2q^3$. Nun ist aber $\mathbb{Z}$ ein faktorieller Ring, und — modulo 3 gerechnet — kommt 2 einmal in der Primfaktorzerlegung der rechten Seite, aber nullmal in der Primfaktorzerlegung der linken Seite der Gleichung

$p^3 = 2q^3$ vor. Dies wäre ein Widerspruch. Also ist p_3 irreduzibel über $\mathbb{Q}$.

Das Polynom $p_4 = Y \cdot X - 1$ ist linear (das heißt, vom Grad 1) über $\mathbb{R}(Y)$ und damit automatisch irreduzibel.

Lösungsvorschlag zur Aufgabe 8: (a) Nach Vorlesung sind die K-linearen Abbildungen $f : K^n \to K^m$ genau die Abbildungen $x \mapsto Ax$ mit $A \in M_K(m,n)$. Angewendet auf den Spezialfall $m = n = 1$ heißt das, daß die K-linearen Abbildungen $f : K \to K$ genau die „Multiplikationsabbildungen" $K \to K,\ x \mapsto ax$ mit $a \in K$ sind.

(b) Die konstante Abbildung $K \to K, x \mapsto 1$ ist sicher nicht K-linear, da sie 0 nicht auf 0 abbildet.

(c) Es gibt dann genausoviele Abbildungen, wie es $m \times n$-Matrizen über K gibt, also q^{mn}.

Lösungsvorschlag zur Aufgabe 10: Im Folgenden schreiben wir $[a] := a + I$ für die Restklasse von a modulo I ($a \in A$). Zu zeigen ist die Unabhängigkeit von $[ab]$ von der Wahl der Vertreter a und b der Restklassen $[a]$ und $[b]$. Seien also $a, b, a', b' \in A$ mit $[a] = [a']$ und $[b] = [b']$. Zu zeigen ist $[ab] = [a'b']$, das heißt $ab - a'b' \in I$. Nun gilt aber $ab - a'b' = ab - ab' + ab' - a'b' = a(b - b') + (a - a')b' \in aI + b'I \subseteq I$, da $b - b', a - a' \in I$ und I ein Ideal ist.

Lösungsvorschlag zur Aufgabe 11: Die Stetigkeit einer linearen Abbildung zwischen zwei normierten Vektorräumen ist nach Vorlesung äquivalent zur Beschränktheit auf der Einheitskugel. In unserem Fall suchen wir eine Norm auf E und haben schon den Absolutbetrag als Norm auf $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$.

(a) Statte E mit der durch

$$\|f\| := \sup\{|f(x)| \mid x \in [0,1]\} \qquad (f \in E)$$

gegebenen Supremumsnorm aus. Ist dann $f \in E$ mit $\|f\| \leq 1$, so gilt $|\varphi(f)| = |f(0)| \leq \|f\| \leq 1$. Also ist φ stetig.

(b) Statte E zum Beispiel aus mit der durch

$$\|f\| := \int_0^1 |f(x)| dx \qquad (f \in E)$$

gegebenen Norm. Definiere $f_k \in E$ für $k \in \mathbb{N}$ durch

$$f_k : [0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto (k+1)(1-x)^k.$$

Dann gilt $\|f_k\| = 1$, aber $|f_k(0)| = k + 1$. Also ist φ nicht stetig.