Université de Rennes 1 — *Année 2007-2008*
Master M1 — F. Ivorra
M. Schweighofer

Algèbre commutative

Feuille d'exercices 1

Anneaux commutatifs, idéaux, quotients

Tous les anneaux considérés dans la suite seront supposés commutatifs et unitaires, et tous les homomorphismes d'anneaux seront supposés unitaires. Sauf précisions supplémentaires, la lettre A désignera un tel anneau.

Exercice 1. — (a) Montrer que l'intersection d'un ensemble de sous-anneaux de A est encore un sous-anneau A.

(b) Soit B un sous-anneau de A et I un idéal de A. Soit R l'ensemble des sommes $b+c$ pour $b \in B$ et $c \in I$. Montrer que R est un sous-anneau de A.

Exercice 2. — Soient $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ et $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ les sous-anneaux de $\mathbb{C}$ engendrés (en tant qu'anneau unitaire) respectivement par $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$. Montrer qu'il n'existe pas d'homomorphisme d'anneaux de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ dans $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$.

Exercice 3. — Soient K un corps et A un anneau $\neq \{0\}$. Montrer que tout homomorphisme d'anneaux de K dans A est injectif.

Exercice 4. — Soient I, J et L des idéaux de A. Démontrer les assertions suivantes :

(a) $I \cdot J$ est contenu dans $I \cap J$;
(b) on a $(I \cdot J) + (I \cdot L) = I \cdot (J + L)$;
(c) $(I \cap J) + (I \cap L)$ est contenu dans $I \cap (J + L)$;
(d) si A est principal, on a $(I \cap J) + (I \cap L) = I \cap (J + L)$;
(e) si J est contenu dans I, on a $J + (I \cap L) = I \cap (J + L)$;
(f) soit K un corps. Supposons que l'on ait $A = K[X, Y]$. Posons $I = (X)$, $J = (Y)$ et $L = (X+Y)$. Déterminer $(I \cap J)+(I \cap L)$ et $I \cap (J+L)$, puis les comparer.

Exercice 5. — Supposons que A soit un produit fini d'anneaux A_i : on a

$$A = A_1 \times \cdots \times A_n.$$

(a) Montrer que les idéaux de A sont de la forme $I_1 \times \ldots I_n$, où les I_j sont des idéaux de A.
(b) Déterminer les idéaux premiers et maximaux de A.
(c) Supposons de plus que les A_i soient des corps. Montrer que A n'a qu'un nombre fini d'idéaux.

Exercice 6. — Montrer qu'un anneau intègre ne possédant qu'un nombre fini d'idéaux est un corps.

Exercice 7. — Soient B un anneau et $f : A \to B$ un homomorphisme d'anneaux. Pour tout idéal I de A, on note $f_*(I)$ l'idéal de B engendré par $f(I)$ et on l'appelle extension de I dans B. Pour tout idéal J de B, on appelle contraction de J l'idéal $f^{-1}(J)$.

Étant donné un idéal I de A et un idéal J de B, montrer les assertions suivantes :

(a) I est contenu dans $f^{-1}(f_*(I))$ et J contient $f_*(f^{-1}(J))$;
(b) on a $f^{-1}(J) = f^{-1}(f_*(f^{-1}(J)))$ et $f_*(I) = f_*(f^{-1}(f_*(I)))$.

Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des idéaux de A qui sont des contractions d'idéaux de B et $\mathcal{B}$ l'ensemble des idéaux de B qui sont des extensions d'idéaux de A.

(c) on a $\mathcal{A} = \{I \mid I = f^{-1}(f_*(I))\}$ et $\mathcal{B} = \{J \mid J = f_*(f^{-1}(J))\}$;
(d) l'application f_* définit une bijection de $\mathcal{A}$ sur $\mathcal{B}$; quel est son inverse ?

Soint I_1 et I_2 deux idéaux de A, et J_1 et J_2 deux idéaux de B. Montrer les assertions suivantes :

(e) on a $f_*(I_1 + I_2) = f_*(I_1) + f_*(I_2)$ et $f^{-1}(J_1 + J_2)$ contient $f^{-1}(J_1) + f^{-1}(J_2)$;
(f) $f_*(I_1 \cap I_2)$ est contenu dans $f_*(I_1) \cap f_*(I_2)$ et l'on a $f^{-1}(J_1 \cap J_2) = f^{-1}(J_1) \cap f^{-1}(J_2)$;
(g) on a $f_*(I_1 \cdot I_2) = f_*(I_1) \cdot f_*(I_2)$ et $f^{-1}(J_1 \cdot J_2)$ contient $f^{-1}(J_1) \cdot f^{-1}(J_2)$;
(h) $f_*(\sqrt{I})$ est contenu dans $\sqrt{f_*(I)}$ et l'on a $f^{-1}(\sqrt{J}) = \sqrt{f^{-1}(J)}$.

Exercice 8. — Soit n un entier ≥ 1. On note $s : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ la surjection canonique.

(a) Étant donné un entier m, montrer que $s(m)$ est inversible dans l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ si et seulement si n et m sont premiers entre eux.
(b) Montrer que l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est intègre si et seulement si n est premier.
(c) Déterminer l'idéal $\sqrt{n\mathbb{Z}}$.

Exercice 9. — Soient $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A, et $(I_k)_{1\leq k\leq n}$ n idéaux de A. On suppose que $\mathfrak{p}$ contient l' idéal produit $\prod_{1\leq k\leq n} I_k$. Montrer que $\mathfrak{p}$ contient l'un des idéaux I_k.

Exercice 10. — Soient J et $(I_k)_{1\leq k\leq n}$ idéaux de A. Si $n \geq 3$, on suppose que $I_3, \ldots, I_n$ sont premiers. Montrer que J est contenu dans l'un des I_k.

Exercice 11. — Montrer que l'anneau $\mathbb{C}[X,Y]/(Y - X^2)$ est principal.

Exercice 12. — Déterminer tous les idéaux premiers des anneaux suivants :

(a) $\mathbb{C}[X]$;
(b) $\mathbb{R}[X]/(X^2 + X + 1)$;
(c) $\mathbb{R}[X]/(X^3 - 6X^2 + 11X + 6)$;
(d) $\mathbb{R}[X]/(X^4 - 1)$.

Déterminer tous les morphismes de $\mathbb{R}$-algèbres de ces algèbres dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.

Exercice 13. — Soit K un corps. On pose $A = K[X,Y]/(X^2, XY, Y^2)$.

(a) Déterminer les éléments inversibles de A ;
(b) déterminer tous les idéaux principaux de A ;
(c) déterminer tous les idéaux de A.

Exercice 14. — Soient K un corps et $\varphi : K[U,V] \to K[X]$ l'homomorphisme d'anneaux défini par les égalités $\varphi(U) = X^3$, $\varphi(V) = -X^2$ et $\varphi(a) = a$ pour tout a dans K. Quels sont les noyau et image de φ ? Soit A l'image de φ. Montrer que A est intègre et que son corps des fractions est isomorphe à $K(X)$.

Exercice 15. — Soit I un idéal de A et soit S une partie de A. On définit le *conducteur* $I : S$ de S dans I par la formule

$$I : S := \{a \in A \mid \text{pour tout } s \in S,\ as \in I\}.$$

Montrer que c'est un idéal de A ; c'est le plus grand idéal K de A tel que $KS \subset I$.

Exercice 16. — (a) Soient I et J deux idéaux comaximaux de A. Montrer que l'on a $I : J = I$. Soit L un idéal tel que $I \cdot L$ soit contenu dans J. Montrer que L est contenu dans J.
(b) Soient $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{q}$ deux idéaux premiers de A dont aucun n'est inclus dans l'autre. Montrer que $\mathfrak{p} : \mathfrak{q} = \mathfrak{p}$ et $\mathfrak{q} : \mathfrak{p} = \mathfrak{q}$. Si K est un corps, donner un exemple de deux idéaux premiers de $K[X,Y]$ dont aucun n'est contenu dans l'autre et qui ne sont pas comaximaux.
(c) Soit a un élément de A non diviseur de zéro. On suppose que (a) est un idéal premier et que l'on a $(a) = I \cdot J$ où I et J sont deux idéaux de A. Montrer que l'on a $I = A$ ou bien $J = A$.
(d) Soit A intègre et I, J et $I + J$ des idéaux principaux. Montrer que $I : J$ est un idéal principal.

Exercice 17. — Montrer qu'un anneau est local si et seulement si l'ensemble de ses éléments non inversibles est un idéal.

Exercice 18. — Soient I et J deux idéaux de A. On suppose que $I + J = A$. Montrer que pour tout entier $n \geq 0$, $I^n + J^n = A$.

Exercice 19. — Soit A un anneau intègre et $\mathfrak{p}$ un idéal premier principal. Soit I un idéal principal de A contenant $\mathfrak{p}$. Montrer que $I = A$ ou $I = \mathfrak{p}$.

Exercice 20. — Soit A un anneau local.

(a) Soit $f_1, \ldots, f_s \in A$ tels que $1 = \sum_{i=1}^{s} f_i$. Montrer que l'un des f_i est invertible.

Soit I et J deux idéaux de A et $a \in A$ un élément non diviseur de 0 tel que $IJ = (a)$.

(b) Montrer qu'il existe $x \in I$ et $y \in J$ tels que $xy = a$. Justifier que x et y ne sont pas diviseurs de 0.
(c) En déduire que $I = (x)$ et $J = (y)$.

Exercice 21. — Soit A l'anneau des fonctions continues sur un espace topologique compact K.

(a) Soit $I \subset A$ un idéal distinct de A. Montrer qu'il existe $x \in K$ tel que pour tout $f \in I$, $f(x) = 0$.
(b) Déterminer les idéaux maximaux de A.

Exercice 22. — On appelle *spectre* de A l'ensemble des idéaux premiers de A. On le note $\operatorname{Spec} A$. Pour tout idéal I de A, on définit l'ensemble $V(I)$ des éléments de $\operatorname{Spec} A$ qui contiennent I (autrement dit $V(I)$ est l'ensemble des idéaux premiers de A qui contiennent I). On dit que $V(I)$ est un ensemble algébrique. Soient I et J des idéaux de A. Montrer les assertions suivantes :

(a) Si I est inclus dans J alors $V(I)$ contient $V(J)$;
(b) on a $V(\sqrt{I}) = V(I)$;
(c) on a $V(I \cap J) = V(I \cdot J) = V(I) \cup V(J)$;
(d) on a $V(I + J) = V(I) \cap V(J)$;

Pour tout ensemble algébrique Z, on définit l'ensemble $I(Z)$ comme étant l'intersection des idéaux premiers qui appartiennent à Z. Montrer les assertions suivantes :

(e) on a $I(Z) = \sqrt{I(Z)}$;
(f) si J est un idéal de A ; on a $I(V(J)) = \sqrt{J}$ et $V(I(Z)) = Z$. En déduire une bijection entre les ensembles algébriques et les idéaux égaux à leur racine ;
(g) si Z est contenu dans Z' alors $I(Z)$ contient $I(Z')$;
(h) on a $I(Z \cap Z') = I(Z) \cap I(Z')$;
(i) on a $I(Z \cap Z') = \sqrt{I(Z) + I(Z')}$;

Pour tout élément f de A on note D_f l'ensemble des idéaux premiers de A qui ne contiennent pas f. Montrer les assertions suivantes :

(j) on a $D_f \cap D_g = D_{fg}$;
(k) f est nilpotent si et seulement si D_f est vide ;
(l) on a $D_f = \operatorname{Spec} A$ si et seulement si f est une unité de A ;
(m) on a $D_f = D_g$ si et seulement si $\sqrt{(f)} = \sqrt{(g)}$.

Exercice 23. — (a) Soit $a \in A$ tel que $a^2 = a$ (un idempotent). Montrer que $V(a) \subset \operatorname{Spec} A$ est à la fois ouvert et fermé.
(b) Montrer que l'ensemble des parties ouvertes et fermées de $\operatorname{Spec} A$ est en bijection avec les idempotents de A.

Exercice 24. — (a) Tout idéal premier contient un idéal premier minimal.
(b) Tout élément d'un idéal premier minimal ne contient que des diviseurs de zéro.
(c) Si l'anneau est réduit, alors l'ensemble des diviseurs de zéro est égal à la réunion de tous les idéaux premiers minimaux.

Exercice 25. — (a) Soit $a \in A$ un élément nilpotent. Si $n \geq 0$ est tel que $a^{n+1} = 0$, calculer $(1 + a)(1 - a + a^2 - \cdots + (-1)^n a^n)$. En déduire que $1 + a$ est inversible dans A.
(b) Soit $a \in A$ un élément inversible et $b \in A$ un élément nilpotent ; montrer que $a + b$ est inversible.