*Université de Rennes 1* — *Année 2007-2008*
Master M1 — F. Ivorra
M. Schweighofer

# Algèbre commutative

*Feuille d'exercices 3*

## Localisation, anneaux noethériens, décomposition primaire

Tous les anneaux considérés dans la suite seront supposés commutatifs et unitaires, et tous les homomorphismes d'anneaux seront supposés unitaires. Sauf précisions supplémentaires, la lettre $A$ désignera un tel anneau.

Exercice 1. — (a) Soit $A$ un anneau tel que pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de $A$, $A_\mathfrak{m}$ est intègre. L'anneau $A$ est-il intègre ?

(b) On suppose que pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de $A$, $A_\mathfrak{m}$ est réduit. Est-ce que $A$ est réduit ?

Exercice 2. — (a) Soit $S$ une partie multiplicative de $A$ et $M$ un $A$-module de type fini.

(b) Montrer que $M[S^{-1}] = 0$ si et seulement s'il existe $s \in S$ tel que $sM = 0$.

(c) Montrer que
$$\mathrm{Ann}_A(M)[S^{-1}] = \mathrm{Ann}_{A[S^{-1}]}(M[S^{-1}]).$$

(d) Donner des contre-exemples aux deux questions précédentes si l'on ne suppose pas que $M$ est de type fini.

Exercice 3. — Soit $S$ une partie multiplicative de $A$.

(a) Si $A$ est réduit, montrer que $A[S^{-1}]$ est réduit.

(b) On note $\ell_S : A \to A[S^{-1}]$ l'homomorphisme naturel $a \mapsto a/1$. Montrer que l'image du nilradical de $A$ engendre en fait le nilradical de $A[S^{-1}]$ en tant qu'idéal.

Exercice 4. — Soit $S$ une partie multiplicative d'un anneau intègre $A$. On note $M_{\mathrm{tors}}$ le sous-module de torsion d'un $A$-module $M$.

(a) Montrer que $M[S^{-1}]_{\mathrm{tors}} = M_{\mathrm{tors}}[S^{-1}]$.

(b) Montrer que les énoncés suivants sont équivalents :
   (i) $M$ est sans torsion ;
   (ii) pour tout idéal $\mathfrak{p}$ prémier, $M_\mathfrak{p}$ est sans torsion ;
   (iii) pour idéal $\mathfrak{m}$ maximal, $M_\mathfrak{m}$ est sans torsion.

Exercice 5. — Soit $A$ un anneau intègre. Considérons les localisés de $A$ par une partie multiplicative ne contenant pas 0 comme un sous-anneau du corps de fractions de $A$. Montrer $A = \bigcap_\mathfrak{m} A_\mathfrak{m}$ où $\mathfrak{m}$ parcourt tous les idéaux maximaux de $A$.

Exercice 6. — On dira qu'une partie $S$ de $A$ est saturée si $ab \in S$ implique $a \in S$ et $b \in S$.

(a) Montrer qu'une partie $S$ de $A$ est multiplicative et saturée si et seulement $A \setminus S$ est réunion d'idéaux premiers de $A$.

(b) Soit $S$ une partie multiplicative de $A$. Soit $\bar{S}$ l'ensemble des $a \in A$ pour lesquels il existe $b \in A$ tel que $ab \in S$. Montrer que $\bar{S}$ est la plus petite partie multiplicative saturée contenant $S$.

(c) Montrer que $A \setminus \bar{S}$ est la réunion des idéaux premiers de $A$ disjoints de $S$.

(d) Montrer que l'homomorphisme naturel $A[S^{-1}] \to A[\bar{S}^{-1}]$ est un isomorphisme.

Exercice 7. — Soit $s_1, \ldots, s_n \in A$ tel que l'idéal engendré $(s_1, \ldots, s_n)$ soit $A$. Notons par $A_i = A[s_i^{-1}]$ la localisation de $A$ par rapport à la partie multiplicative $\{1, s_i, s_i^2, \ldots\}$ engendrée par $s_i$. De même soit $A_{ij} = A[(s_i s_j)^{-1}]$ la localisation par rapport à la partie multiplicative engendrée par $s_i s_j$.

(a) Soit $a \in A$ tel que $a = 0$ dans $A_i$ pour tout $i$. Montrer que $a = 0$.

(b) Soient $a_i \in A_i$ tel que $a_i = a_j$ dans $A_{ij}$ pour tout $i$ et $j$. Démontrer qu'il existe $a \in A$ tel que $a_i = a$ dans $A_i$ pour tout $i$.

Exercice 8. — Soit $A$ un anneau. Si $A[X]$ est noethérien, $A$ est-il nécessairement noethérien ?

Exercice 9. — Soit $E \subset \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ et $V$ l'ensemble des $n$-uplets $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ tels que pour tout $p \in E$, $p(x_1, \ldots, x_n) = 0$. Montrer qu'il existe une partie finie $\{p_1, \ldots, p_k\} \subset E$ telle que $V$ soit défini par les équations $p_i(x_1, \ldots, x_n) = 0$ (pour $1 \leq i \leq k$).

Exercice 10. — Montrer que les anneaux suivants ne sont pas noethériens.

(a) $\mathbb{C}[X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots]$ ;
(b) $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ;
(c) $\mathbb{C} + \mathbb{C}[X, Y]X \subset \mathbb{C}[X, Y]$.

Exercice 11. — Soit $A$ un anneau et $I_1 \subset I_2 \subset \ldots$ une suite croissante d'idéaux de type fini. Soit $I = \bigcup_n I_n$. Montrer que $I$ est de type fini si et seulement si la suite $(I_n)_n$ est stationnaire.

Exercice 12. — Soit $A$ un anneau intègre et noethérien. On suppose que $A$ admet un unique idéal maximal $\mathfrak{m}$ et que cet idéal maximal est engendré par un élément non nul $a$.

(a) Montrer que $a \in A$ est inversible si et seulement si $a \notin \mathfrak{m}$.
(b) Montrer que tout élément non nul de $A$ s'écrit d'une manière unique sous la forme $a^n u$, pour $n \geq 0$ et $u \in A^\times$.

Exercice 13. — Soit $A$ un anneau et $I, J$ deux idéaux de $A$ tels que $I \cap J = (0)$. Montrer que $A$ est noethérien si et seulement si $A/I$ et $A/J$ sont noethériens.

Exercice 14. — Soit $A$ un anneau local dont l'idéal maximal $\mathfrak{m}$ est principal et tel que $\bigcap_n \mathfrak{m}^n = 0$. Montrer que $A$ est noethérien et que tout idéal non nul de $A$ est une puissance de $\mathfrak{m}$.

Exercice 15. — Soit $F$ l'ensemble des polynômes $f \in \mathbb{Q}[X]$ tel que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $f(n) \in \mathbb{Z}$.

(a) Montrer que $F$ est une sous-algèbre de $\mathbb{Q}[X]$.
(b) Montrer qu'une fonction $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ appartient à $F$ si et seulement si $f(0) \in \mathbb{Z}$ et la fonction $n \mapsto f(n+1) - f(n)$ appartient à $F$.
(c) Montrer que les polynômes $1, X, X(X-1)/2, \ldots, X(X-1)\cdots(X-k+1)/k!, \ldots$ forment une base de $F$ comme $\mathbb{Z}$-module.
(d) Montrer que $F$ n'est pas noethérien.

Exercice 16. — Soient $M$ un $A$-module et $N_1$ et $N_2$ deux sous-modules de $M$. Montrer que $N_1$ et $N_2$ sont noethériens si et seulement si $N_1 + N_2$ est noethérien, et que $M/N_1$ et $M/N_2$ sont noethériens si et seulement si $M/(N_1 \cap N_2)$ est noethérien.

Exercice 17. — Soit $A$ l'anneau des fonctions continues sur $[-1; 1]$.

(a) L'anneau $A$ est-il intègre ? réduit ?
(b) Montrer que l'idéal $I$ des fonctions nulles en 0 n'est pas de type fini. Montrer que $I = I^2$.
(c) Montrer que l'idéal $(x)$ n'est pas primaire.

Exercice 18. — Montrer qu'un idéal dont le radical est maximal est primaire.

Exercice 19. — Soit $k$ un corps et $A = k[X, Y, Z]/(XY - Z^2)$. On note $x = \mathrm{cl}(X)$, etc. Soit $\mathfrak{p}$ l'idéal $(x, z) \subset A$.

(a) Montrer que $\mathfrak{p}$ est premier mais que $\mathfrak{p}^2$ n'est pas primaire.
(b) Montrer que $(x) \cap (x^2, y, z)$ est une décomposition primaire minimale de $\mathfrak{p}^2$.

Exercice 20. — Soient $A$ et $B$ deux anneaux, $\varphi : A \to B$ un homomorphisme d'anneaux.

(a) Si $\mathfrak{p} \subset B$ est un idéal premier, montrer que $\varphi^{-1}(\mathfrak{p})$ est un idéal premier de $A$.
(b) Si $\mathfrak{q}$ est un idéal $\mathfrak{p}$-primaire de $B$, montrer que $\varphi^{-1}(\mathfrak{q})$ est $\varphi^{-1}(\mathfrak{p})$-primaire.
(c) Soit $M$ un $B$-module qu'on peut aussi considérer comme un $A$-module. Si $M$ est $\mathfrak{p}$-primaire comme $B$-module ($\mathfrak{p} \subset B$), montrer qu'il est $f^{-1}(\mathfrak{p})$-primaire comme $A$-module.
(d) On suppose que $A$ et $B$ sont noethériens et que $M$ est un $B$-module de type fini. Montrer que $\mathrm{Ass}_A(M) = \{\varphi^{-1}(\mathfrak{p}) \mid \mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_B(M)\}$.

Exercice 21. — (a) Donner une décomposition primaire de l'idéal $I = (4, X)$ de l'anneau $\mathbb{Z}[X]$.

(b) Soit $I$ un idéal d'un anneau $A$ et soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de $A$. Soit $a$ un élément de $A$ n'appartenant pas à $\mathfrak{p}$. On suppose que $(I : a)$ est $\mathfrak{p}$-primaire. Montrer que $I = (I : a) \cap (I + Aa)$.

Exercice 22. — Soit $k$ un corps, $A = k[X, Y, Z]$ et $I = (XY, YZ, XZ)$. Quels sont les idéaux premiers minimaux contenant $I$ ? Donner une décomposition primaire minimale de $I$. Cette décomposition est-elle unique ?

Exercice 23. — Soit $k$ un corps. Montrer que l'idéal $(X^2, Y^2)$ est ni produit ni intersection de puissances d'idéaux premiers.

Exercice 24. — Soit $\mathfrak{q} \subset A$ un idéal dont le radical $\mathfrak{p} = \sqrt{\mathfrak{q}}$ est prémier. Montrer que $\mathfrak{q}$ est $\mathfrak{p}$-primaire si et seulement si on a un monomorphisme naturel $A/\mathfrak{q} \to A_\mathfrak{p}/\mathfrak{q}A_\mathfrak{p}$.