Übungsblatt 10 zur Modelltheorie

Sommersemester 2007

Aufgabe 1: Entscheide für folgende Klassen von Strukturen jeweils, ob sie axiomatisierbar, vollständig, modellvollständig und substrukturvollständig sind: Die Klasse der

(a) Mengen (also $L_=$-Strukturen mit $L_= := (\emptyset, \emptyset, \emptyset)$),
(b) endlichen Mengen,
(c) unendlichen Mengen,
(d) abzählbaren Mengen,
(e) nichtleeren dichten linearen Ordnungen (in der Sprache $L_\leq$),
(f) nichtleeren dichten linearen Ordnungen ohne Endpunkte.

Aufgabe 2: Finde eine Sprache L und eine Klasse $\mathcal{K}$ von L-Strukturen derart, daß

(a) $\mathcal{K}$ vollständig, aber nicht modellvollständig ist,
(b) $\mathcal{K}$ modellvollständig, aber nicht unterstrukturvollständig ist,
(c) $\mathcal{K}$ unterstrukturvollständig, aber nicht vollständig ist.

Aufgabe 3: Fasse $\mathbb{R}$ als Ring, also als L_R-Struktur auf. Zeige, daß dann $\mathrm{Th}(\mathbb{R})$ nicht unterstrukturvollständig ist.

Aufgabe 4: Sei L die um ein einstelliges Funktionszeichen f erweiterte Sprache L_OF der angeordneten Körper. Sei $\mathcal{A}$ eine L-Struktur, deren L_OF-Redukt der angeordnete Körper der reellen Zahlen ist. Es ist also $\mathcal{A}$ gleich $\mathbb{R}$ zusammen mit einer Funktion $f^\mathcal{A} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Betrachte die Ultrapotenz $\mathcal{B} := \mathcal{A}^\mathbb{N}/\mathcal{U}$ nach einem freien Ultrafilter $\mathcal{U}$ auf $\mathbb{N}$. Wir identifizieren $\mathcal{A}$ mit seinem Bild unter der kanonischen Einbettung $\mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{B}$. Sei

$$I := \{b \in B \mid |b| < \varepsilon \text{ für alle } \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}\}$$

die Menge der *infinitesimalen* Elemente von $\mathcal{B}$. Zeige

(a) $f^\mathcal{A}$ ist stetig genau dann, wenn für alle $a \in \mathbb{R}$ und alle $i \in I$ gilt

$$f^\mathcal{B}(a + i) - f^\mathcal{B}(a) \in I,$$

(b) $f^\mathcal{A}$ ist gleichmäßig stetig genau dann, wenn für alle $b \in B$ und alle $i \in I$

$$f^\mathcal{B}(b + i) - f^\mathcal{B}(b) \in I.$$

Abgabe bis Montag, den 2. Juli 2007, um 14 Uhr.