Feuille d'exercices n^{o}3.
Primitives.

Calculs de primitives.

Calculer les primitives suivantes :

1. après linéarisation
   (a) $\displaystyle\int (x^2 + \frac{1}{x^2})^2 \, dx$
   (b) $\displaystyle\int \sin^2(x) \, dx$
2. par intégration par parties
   (a) $\displaystyle\int x^2 \ln(x) \, dx$
   (b) $\displaystyle\int xe^x \, dx$
   (c) $\displaystyle\int \ln(x) \, dx$
   (d) $\displaystyle\int x \sin(x) \, dx$
3. du type $\int u'(x) \, f(u(x)) \, dx$:
   (a) $\displaystyle\int \frac{x^5}{1+x^6} \, dx$
   (b) $\displaystyle\int \sin(x) \, \cos(x) \, dx$
4. par changement de variable
   (a) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x+1}} \, dx$ (poser $u = \sqrt{x+1}$)
   (b) $\displaystyle\int \frac{1}{3x^2+2} \, dx$ (poser $u = \sqrt{\frac{3}{2}} \, x$)

Applications.

5. Calculer l'intégrale suivante (souvent rencontrée dans des problèmes de statistiques) :
$$\int x \, \exp\left(x^2\right) dx$$
6. Une substance commence à entrer dans la circulation sanguine d'un chat au temps $t = 0$. D'après un modèle théorique, le taux d'accroissement de la substance a l'intérieur de la circulation est donné par la formule
$$\dot{y} = A \, \exp(-\theta \, t) - B \, \exp(-\lambda \, t)$$
où $\dot{y}$ est le taux d'accroissement de la substance en circulation au temps t et où A, B, θ, λ sont des constantes.
Déterminer une expression pour la quantité totale de substance en circulation en tout temps T.
7. Une population d'animaux augmente à la vitesse de $200 + 50t$ (t en années). De combien la population a-t-elle augmenté entre la quatrième et la dixième année ?
8. Une population de bactéries d'initialement 400 unités croît à la vitesse de $450,268 \times e^{1,12567\,t}$ bactéries par heure. Quel est l'effectif de cette population après trois heures ?

Compléments.

9. Calculer les primitives suivantes
   (a) $\displaystyle\int (x^3 + \frac{1}{x^2})^4 \, dx$
   (b) $\displaystyle\int \ln(x^2 + 1) \, dx$
   (c) $\displaystyle\int x^3 \ln(x) \, dx$
   (d) $\displaystyle\int x^2 e^x \, dx$

10. Déterminer l'aire de l'ensemble des points du plan délimité par les courbes représentatives dans un repère orthonormé des fonctions f et g définies par

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2}{4} \\ g(x) = -\dfrac{x^2}{4} + x + 12 \end{cases}$$

11. La vitesse d'un objet en mouvement rectiligne est donnée à tout instant t par $v(t) = t^2 \, e^{-t}$ (en m/s). Quelle distance a-t-il parcouru entre l'instant $t = 0$ et l'instant $t = T$?

12. La loi de l'écoulement laminaire exprime la vitesse v du sang qui s'écoule dans un vaisseau sanguin de rayon R et de longueur l à une distance r de l'axe central

$$v(r) = \frac{P}{4 \, \nu \, l} \, (R^2 - r^2)$$

où P est la différence de pression entre les deux extrémités du vaisseau et ν est le coefficient de viscosité du sang. On souhaite calculer le débit ou flux (volume par unité de temps) du sang. Considérons tout d'abord un anneau de rayon intérieur r_{i-1} et de rayon extérieur r_i. La surface de cet anneau est

$$2\pi r_i (r_i - r_{i-1})$$

et en supposant que la vitesse est constante dans cet anneau, le volume de sang par unité de temps est

$$2\pi r_i (r_i - r_{i-1}) v(r_i)$$

Si l'on considère tous les anneaux de rayons intérieurs $r_{i-1} = (i-1)/n \, R$ et de rayons extérieurs $r_i = i/n \, R$, alors le volume de sang par unité de temps, appelé flux, est

$$F = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} 2\pi r_i v(r_i)(r_i - r_{i-1})$$

   (a) Exprimer F sous forme d'une intégrale entre 0 et R.
   (b) Calculer F (loi de Poiseuille).