Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Markus Schweighofer
Aaron Kunert / Sven Wagner

Wintersemester 2009/2010
Übungsblatt 13
15.02.2010

Lineare Algebra I

Dieses Aufgabenblatt dient nur der Klausurvorbereitung. Es wird nicht korrigiert, aber ab Anfang März wird es eine Musterlösung geben.

Aufgabe 13.1:

Sei K ein Körper, sei V ein K–Vektorraum, und sei f ein Endomorphismus von V. Sei außerdem jeder Vektor $v \in V \setminus \{0\}$ ein Eigenvektor von f. Zeigen Sie, dass es dann ein $\lambda \in K$ mit $f = \lambda \operatorname{id}_V$ gibt.

Aufgabe 13.2:

Sei K ein Körper, sei V ein endlichdimensionaler K–Vektorraum, und sei f ein Endomorphismus von V. Seien $E_1, \ldots, E_m$ Eigenräume zu paarweise verschiedenen Eigenwerten von f. Zeigen Sie, dass für jeden f–invarianten Untervektorraum W (vgl. §10.3) mit $W \subseteq E_1 + \cdots + E_m$ die Identität

$$W = (W \cap E_1) + \cdots + (W \cap E_m)$$

gilt und $f_{|W}$ diagonalisierbar ist.

(Hinweis: Führen Sie Induktion über die Länge s einer folgenden Darstellung von Elementen $w \in W$: $w = \sum_{j=1}^{s} e_j$ mit $e_j \in E_j$ und $e_s \neq 0$.)

Aufgabe 13.3:

Seien K ein Körper, V ein endlichdimensionaler K–Vektorraum und f, g Endomorphismen von V mit $f \circ g = g \circ f$. Zeigen Sie:

(a) Die Eigenräume von f sind g–invariant.

(b) Sind f und g beide diagonalisierbar, so gibt es eine Basis von V, die nur aus Vektoren besteht, die sowohl Eigenwerte von f als auch von g sind. Man sagt dann, dass f und g **simultan diagonalisierbar** sind.
(Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 13.2.)

Aufgabe 13.4:

(a) Finden Sie eine invertierbare Matrix $T \in \mathbb{R}^{3\times3}$ und eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{3\times3}$, so dass

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & 5 \\ 8 & 1 & 4 \\ -6 & -2 & -7 \end{pmatrix} = T^{-1}DT$$

gilt.

(b) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{5\times5}.$$

(c) Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ ist die Matrix

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 2a & b & a \\ 10 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

diagonalisierbar?

(d) Seien

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & -4 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Diagonalisieren Sie die beiden Matrizen simultan, d.h. finden Sie eine invertierbare Matrix $T \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und Diagonalmatrizen $D_1, D_2 \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $A = T^{-1}D_1T$ und $B = T^{-1}D_2T$.

(Hinweis: Lösen Sie erst Aufgabe 13.3.)

Aufgabe 13.5:

Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ gegeben durch $f_0 = 0, f_1 = 1$ und für $n \geq 2$ durch die Vorschrift $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$.

(a) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Identität

$$\begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n$$

gilt.

(b) Finden Sie eine invertierbare Matrix $T \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, so dass

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = TDT^{-1}$$

gilt.

(c) Leiten Sie aus obigen Überlegungen eine explizite Darstellung von f_n $(n \in \mathbb{N}_0)$ her (d.h. drücken Sie die Zahl f_n nur in Abhängigkeit von n, nicht aber von f_k mit $k \leq n$ aus).

Aufgabe 13.6:

Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$–Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und zugehöriger Norm $\| \cdot \|$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Ist $f \colon V \longrightarrow V$ ein Endomorphismus, für den $\|x\| = \|f(x)\|$ für alle $x \in V$ gilt, so ist f bijektiv.

(b) Ist U ein Untervektorraum von V, so ist $(U^\perp)^\perp = U$.

Aufgabe 13.7:

Sei V ein $\mathbb{K}$–Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und zugehöriger Norm $\| \cdot \|$. Seien U ein Untervektorraum von V, $v \in V$ und $w \in U$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(i) w ist die orthogonale Projektion von v auf U.

(ii) Für alle $u \in U$ gilt

$$\|v - u\| \geq \|v - w\|.$$

Aufgabe 13.8:

Sei

$$V := \{f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \mid \ f \text{ ist stetig } \}.$$

Mit den üblichen, punktweisen Operationen wird V zu einem $\mathbb{R}$–Vektorraum. Wir betrachten auf V das Skalarprodukt

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle \colon V \times V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (f,g) &\longmapsto \int_0^1 f(x)g(x)dx \end{aligned}$$

(a) Berechnen Sie den Winkel zwischen den Funktionen $f, g \in V$ definiert durch $f(x) := \sin(\pi x)$ und $g(x) := \cos(\pi x)$ für $x \in [0,1]$.

(b) Berechnen Sie den Winkel zwischen den Funktionen $f, g \in V$ definiert durch $f(x) := x$ und $g(x) := 2x^2 - 3x^4$ für $x \in [0,1]$.

(c) Finden Sie ein $f \in V$, das orthogonal zu der Funktion $g \in V$ ist, die durch $g(x) := 6x^2 - 12x + 3$ für $x \in [0,1]$ definiert ist.

Aufgabe 13.9:

Sei K ein Körper, und seien $f, g \in K[X]$ von der Gestalt

$$f = a_m X^m + a_{m-1} X^{m-1} + \cdots + a_0 \text{ und } g = b_n X^n + b_{n-1} X^{n-1} + \cdots + b_0$$

mit $a_m \neq 0 \neq b_n$. Sei außerdem

$$\Re(f,g) := \det \begin{pmatrix} a_m & a_{m-1} & \cdots & \cdots & a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_m & a_{m-1} & \cdots & \cdots & a_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & \cdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_m & a_{m-1} & \cdots & \cdots & a_0 \\ b_n & b_{n-1} & \cdots & \cdots & b_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_n & b_{n-1} & \cdots & \cdots & b_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & \cdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & b_n & b_{n-1} & \cdots & \cdots & b_0 \end{pmatrix}.$$

(In der angegebenen $(m+n) \times (m+n)$ Matrix stehen die Koeffizienten $a_m, \ldots, a_0$ in n Zeilen und die Koeffizienten $b_n, \ldots, b_0$ in m Zeilen.)
Zeigen Sie:

(a) Es gibt genau dann Polynome $p, q \in K[X] \setminus \{0\}$ mit $\deg(p) < n$, $\deg(q) < m$ und $fp = gq$, wenn $\Re(f,g) = 0$ gilt.
(Hinweis: Betrachten Sie die transponierte Matrix zu der oben angegebenen Matrix.)

(b) Haben f und g eine gemeinsame Nullstelle, so gilt $\Re(f,g) = 0$.

Abgabe: gar nicht.