Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Markus Schweighofer
Aaron Kunert / Sven Wagner

Wintersemester 2009/2010
Übungsblatt 8
07.11.2009

Lineare Algebra I

Aufgabe 8.1:

Sei K ein Körper. Sei I eine Menge, und sei für jedes $i \in I$ ein K-Vektorraum $(V_i, +_i, \cdot_i)$ gegeben. Zeigen Sie, dass das direkte Produkt $\prod_{i \in I} V_i$ der abelschen Gruppen $(V_i, +_i)$ vermöge der Skalarmultiplikation

$$\cdot\colon K \times \prod_{i\in I} V_i \longrightarrow \prod_{i\in I} V_i, \quad (\lambda, v) \longmapsto \big(i \mapsto \lambda \cdot_i v(i)\big)$$

zu einem K-Vektorraum wird.

Aufgabe 8.2:

Finden Sie jeweils eine Matrix A über dem Körper K, für die die angegebene Teilmenge von K^n die Lösungsmenge des homogenen Gleichungssystems in n Unbekannten $Ax = 0$ ist. Laut Vorlesung ist eine solche Lösungsmenge stets Universum eines Untervektorraums des K–Vektorraums K^n. Bestimmen Sie jeweils eine Basis dieses Untervektorraums.

(a) $\operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 0\\1\\0\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\1\\1\\1\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\2\\1\\1\\0 \end{pmatrix} \right\}$ für $K = \mathbb{F}_3$.

(b) $\operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1\\2\\3\\4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2\\3\\4\\5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3\\4\\5\\6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4\\5\\6\\7 \end{pmatrix} \right\}$ für $K = \mathbb{Q}$.

(c) $$\operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1\\ \pi\\ 3\\ \pi^2\\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\pi\\ 0\\ \frac{\pi^2}{2}\\ 4-\pi^3\\ -2\pi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2\\ -\pi^2\\ -4\pi-\frac{\pi^2}{2}\\ -\frac{8}{\pi}-3+2\pi^2\\ 4-3\pi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\ 2\pi\\ 6+\frac{\pi}{2}\\ \frac{4}{\pi}+\pi^2\\ 8 \end{pmatrix} \right\}$$
$$\cap \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1\\ 3\\ \frac{5}{\pi}\\ 3\pi^2\\ \frac{9}{\pi} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2\\ 7\\ \frac{10}{\pi}+4\pi\\ 7\pi^2\\ \frac{21}{\pi} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\pi}{2}\\ \frac{\pi}{2}\\ \frac{7}{2}-4\pi^2\\ \frac{\pi^3}{2}\\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} \right\} \text{ für } K = \mathbb{R}.$$

Aufgabe 8.3:

(a) Zeigen Sie, dass der Körper $\mathbb{C}$ ein $\mathbb{R}$–Vektorraum mit Basis $(1, \mathring{\imath})$ ist.

(b) Sei K ein Körper. Zeigen Sie, dass $K[X]_d := \{f \in K[X] \mid \deg(f) \leq d\}$ für alle $d \in \{-\infty\} \cup \mathbb{N}_0$ ein endlich erzeugter K–Vektorraum ist. Finden Sie zu jedem $d \in \{-\infty\} \cup \mathbb{N}_0$ eine Basis von $K[X]_d$.

Bitte wenden.

(c) Sei M eine Menge. Zeigen Sie, dass es genau einen $\mathbb{F}_2$–Vektorraum mit $(\mathcal{P}(M), \triangle)$ als zugrundeliegende abelsche Gruppe gibt. Finden Sie für endliches M eine Basis dieses Vektorraums.

(d) Zeigen Sie, dass die Mengen $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(-a) = f(a) \text{ für alle } a \in \mathbb{R}\}$ und $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(-a) = -f(a) \text{ für alle } a \in \mathbb{R}\}$ Universen von Untervektorräumen des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ (vgl. Aufgabe 8.1) sind.

Aufgabe 8.4:

Sei K ein Körper und V ein K–Vektorraum. Für $0 \neq v \in V$ nennt man den Untervektorraum $\{\lambda v \mid \lambda \in K\}$ von V **die Gerade durch** v. Betrachten Sie den Fall $K = \mathbb{F}_9$. Bestimmen Sie alle Geraden im K- Vektorraum K^2 und zeichnen Sie diese in ein passendes Koordinatensystem. Bringen Sie dafür die Elemente des Körpers in irgendeine Ihnen sinnvoll erscheinende Reihenfolge und benutzen Sie für jede Gerade eine andere Farbe. Sind alle Geraden gerade?

Abgabe bis Montag, den 14. Dezember, 10 Uhr in die Briefkästen neben F411.

Das griechische Alphabet

A	α	Alpha	I	ι	Iota	P	ρ, ϱ	Rho
B	β	Beta	K	κ, $\varkappa$	Kappa	Σ	σ, ς	Sigma
Γ	γ	Gamma	Λ	λ	Lambda	T	τ	Tau
Δ	δ	Delta	M	μ	My	Y	υ	Ypsilon
E	ϵ, ε	Epsilon	N	ν	Ny	Φ	ϕ, φ	Phi
Z	ζ	Zeta	Ξ	ξ	Xi	X	χ	Chi
H	η	Eta	O	o	Omikron	Ψ	ψ	Psi
Θ	θ, ϑ	Theta	Π	π, ϖ	Pi	Ω	ω	Omega

Am Montag, dem 14. Dezember, findet von 18:00 – 20:00 Uhr eine Übungsklausur zur Linearen Algebra I statt. Wenn Sie daran teilnehmen möchten, teilen Sie dies bitte Ihrem Übungsleiter mit. Alternativ können Sie ab dem 14. Dezember, 18 Uhr die Übungsklausur auch auf der Übungshomepage herunterladen und die bearbeitete Übungsklausur bis Freitag, den 18. Dezember, 10 Uhr in den Briefkasten ihrer Übungsgruppe einwerfen. Alle abgegebenen Übungsklausuren werden korrigiert und im neuen Jahr zurückgegeben. Eine Besprechung der Übungsklausur findet nicht statt, es wird aber eine Musterlösung geben. Die Übungsklausur ist in keiner Weise relevant für das Bestehen des Moduls.

Geschrieben wird die Übungsklausur in den Hörsälen R 711 und A 703. Die Verteilung auf die beiden Hörsäle wird am Donnerstag, dem 10. Dezember, auf der Übungshomepage und als Aushang am Raum F 407 veröffentlicht. Als Hilfsmittel dürfen Sie ein beidseitig handbeschriebenes DIN–A4–Blatt mitbringen. Weitere Hilfsmittel sind nicht erlaubt. Bitte erscheinen Sie pünktlich.