Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Markus Schweighofer
Aaron Kunert / Sven Wagner

Wintersemester 2009/2010
Übungsblatt 9
21.12.2010

Lineare Algebra I

Die Aufgaben, die mit (∗) gekennzeichnet sind, werden nicht korrigiert und fallen nicht unter die 50%-Regelung. Es wird aber eine Musterlösung für sie geben.

Aufgabe 9.1:

Sei K ein Körper mit $1+1 \neq 0$, und sei V ein K–Vektorraum. Zeigen Sie: Sind $u, v, w \in V$ linear unabhängig, so auch $u+v, u+w, v+w$.

Aufgabe 9.2:

Sei K ein Körper. Welche der folgenden Mengen sind Universen von Untervektorräumen der angegebenen K–Vektorräume?

(a) $\{(x_1, \ldots, x_5) \in K^5 \mid x_1 - x_2 = x_3 + x_4 + x_5\} \subseteq K^5$

(b) $\{x \in K \mid f(x) = 0\} \subseteq K$ für ein Polynom $f \in K[X]$

(c) $\{f \in K[X] \mid f(x) = 0\} \subseteq K[X]$ für ein $x \in K$

Aufgabe 9.3:

Sei K ein Körper, und seien V und W zwei K–Vektorräume. Zeigen Sie:

(a) Sind U_1 und U_2 Untervektorräume von V, so ist $U_1 \cup U_2$ genau dann ein Untervektorraum von V, wenn $U_1 \subseteq U_2$ oder $U_2 \subseteq U_1$ gilt.

(b) Ist $f\colon V \to W$ eine K–lineare Abbildung, so sind $\ker f$ und $\operatorname{im} f$ Untervektorräume von V.

Aufgabe 9.4:

Sei K ein Körper, sei $n \in \mathbb{N}$, und seien $a_1, \ldots, a_n \in K$, wobei nicht alle dieser Elemente die 0 sind. Zeigen Sie, dass die **Hyperebene**

$$H := \{(x_1, \ldots, x_n) \in K^n \mid \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0\}$$

ein Untervektorraum der Dimension $n-1$ des K–Vektorraumes K^n ist.

Aufgabe 9.5:

Sei K ein Körper, und seien V und W zwei K–Vektorräume. Sei $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie:

(a) Ist B eine Basis von V und C eine Basis von W, so ist $(B \times \{0\}) \cup (\{0\} \times C)$ eine Basis von $V \times W$.

(b) Sind V und W endlich–dimensional, so auch $V \times W$ und es gilt $\dim\,(V \times W) = \dim\, V + \dim\, W$.

(c) Sind $v_1, \ldots, v_r \in V$ linear abhängig, so auch $f(v_1), \ldots, f(v_r)$.

(d) Ist f injektiv und sind $v_1, \ldots, v_r \in V$ linear unabhängig, so sind auch $f(v_1), \ldots, f(v_r)$ linear unabhängig.

(e) Ist V endlich–dimensional, sind $v_1, \ldots, v_r \in V$ linear unabhängig und $w_1, \ldots, w_r \in W$. Dann gibt es eine lineare Abbildung $g \colon V \to W$, die für alle $i \in \{1, \ldots, r\}$ den Vektor v_i auf den Vektor w_i abbildet.

(f) Ist V endlich–dimensional, so auch $\operatorname{im} f$.

(g) Ist V endlich–dimensional, ist $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von $\ker f$ und $w_1, \ldots, w_m$ eine Basis von $\operatorname{im} f$, und ist für jedes $j \in \{1, \ldots, m\}$ ein $u_j \in f^{-1}(\{w_j\})$ gegeben, so ist $(v_1, \ldots, v_n, u_1, \ldots, u_m)$ eine Basis von V.

(h) Es gilt, wenn $\dim V < \infty$: $\dim V = (\dim \ker f) + (\dim \operatorname{im} f)$.

(i) Ist $\dim V < \infty$, so gilt $V \cong (\ker f) \times (\operatorname{im} f)$.

Aufgabe 9.6:

Sei K ein Körper, und sei $d \in \mathbb{N}_0$.

(a) Bestimmen Sie die Dimension des K-Vektorraumes $K[X]_d$.

(b) Konstruieren Sie bezüglich einer von Ihnen gewählten Basis $\underline{v}$ von $\mathbb{Q}[X]_6$ die Darstellungsmatrix $M(D, \underline{v}, \underline{v})$ der formalen Ableitung $D \colon \mathbb{Q}[X]_6 \longrightarrow \mathbb{Q}[X]_6$.

(c) Berechnen Sie den Kern von D (ebenfalls für $K = \mathbb{Q}$ und $d = 6$).

Aufgabe 9.7:

Sei $W := \mathbb{F}_5[X]_4$.

(a) Zeigen Sie, dass $\underline{v} = (X+1, X^4, X^3 - X^2, X^2 - 1, X - 1)$ und $\underline{w} = (2X^3 + X^2, X^2 + X, X^3 - 3X^2, X^4 + X^2, X^2 - 1)$ geordnete Basen von W sind.

(b) Drücken Sie die Elemente von $\underline{v}$ als Linearkombinationen der Elemente von $\underline{w}$ aus und umgekehrt.

(c) Betrachten Sie die Abbildung

$$\begin{aligned} F \colon W &\longrightarrow W \\ p &\longmapsto D((X+1)p). \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass F ein $\mathbb{F}_5$–Vektorraumhomomorphismus ist, berechnen Sie die Darstellungsmatrix bezüglich $\underline{v}$ und $\underline{w}$ und bestimmen Sie den Kern von F.

(d) Man kann die Elemente aus $\underline{v}$ auch als Polynome über dem Körper $\mathbb{F}_2$ auffassen. Zeigen Sie, dass $\underline{v}$ keine Basis von $\mathbb{F}_2[X]_4$ ist.

Aufgabe 9.8:

Bestimmen Sie die Dimension des Zeilenraumes und des Spaltenraumes (als $\mathbb{C}$–Vektorraum) der folgenden Matrix:

$$\begin{pmatrix} 4 + \mathring{\imath} & -1 + 4\mathring{\imath} & 20 + 5\mathring{\imath} & 7 + 23\mathring{\imath} \\ 1 & \mathring{\imath} & 3 & 1 + 3\mathring{\imath} \\ -1 + \mathring{\imath} & -1 - \mathring{\imath} & -5 + 7\mathring{\imath} & -10 \\ \mathring{\imath} & -1 & 1 + 6\mathring{\imath} & -4 + 5\mathring{\imath} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{4 \times 4}.$$

Aufgabe 9.9: (∗)

Sie dürfen für die Lösung dieser Aufgabe keine Ergebnisse aus der Vorlesung verwenden.

Sei K ein Körper.

(a) Sei $v = (v_1, v_2) \in K^2$ nicht der Nullvektor, sowie $w = (w_1, w_2) \in K^2$ ein weiterer Vektor. Zeigen Sie, dass es genau dann ein $\lambda \in K$ mit $w = \lambda v$ gibt, wenn $v_1 w_2 - v_2 w_1 = 0$ gilt.

(b) Seien $v, w \in K^2$ linear unabhängig. Zeigen Sie, dass es zu jedem $u \in V$ eindeutig bestimmte Elemente $\alpha, \beta \in K$ mit $u = \alpha v + \beta w$ gibt.

Aufgabe 9.10: (∗)

Sei $n \geq 1$ eine natürliche Zahl. Wir betrachten n Vektoren

$$v_i := (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}) \in \mathbb{Q}^n \quad (1 \leq i \leq n)$$

mit $a_{jj} = 1$ und $\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| < 2$ für alle $j = 1, \ldots, n$. Dabei sei $|\cdot|$ der gewöhnliche Absolutbetrag auf $\mathbb{Q}$. Zeigen Sie, dass $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von $\mathbb{Q}^n$ ist.

Aufgabe 9.11: (∗)

Betrachten Sie den $\mathbb{F}_{11}$–Vektorraum $V := \{f \mid f\colon \mathbb{F}_{11} \to \mathbb{F}_{11}\}$ aller Abbildungen von $\mathbb{F}_{11}$ nach $\mathbb{F}_{11}$ (vgl. Aufgabe 8.1).

(a) Bestimmen Sie die Dimension von V.

(b) Zeigen Sie, dass $U := \{f \in V \mid f(0) = 0\}$ und $W := \{f \in V \mid f \text{ ist linear}\}$ Untervektorräume von V sind.

(c) Bestimmen Sie jeweils eine Basis und die Dimension dieser Untervektorräume.

(d) Wie viele Elemente enthalten U und W?

Aufgabe 9.12: (∗)

Sei K ein Körper. Eine Matrix $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in K^{n \times n}$ heißt ein **schwaches magisches Quadrat**, falls es ein $s(A) \in K$ mit

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = s(A) \quad \text{für alle } i \in \{1, \ldots, n\}$$

und

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = s(A) \quad \text{für alle } i \in \{1, \ldots, n\}$$

gibt. Zeigen Sie:

(a) $Q(n) := \{A \in K^{n \times n} \mid A \text{ ist ein schwaches magisches Quadrat}\}$ ist ein Untervektorraum des K–Vektorraumes $K^{n \times n}$ und $s\colon Q(n) \to K$, $A \mapsto s(A)$, ist eine lineare Abbildung.

(b) Die Abbildung $(\ker s) \to K^{(n-1)\times(n-1)}$, $(a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \mapsto (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n-1}$, ist ein Isomorphismus.

(c) $\dim Q(n) = (n-1)^2 + 1$.

Abgabe bis Montag, den 11. Januar, 10 Uhr in die Briefkästen neben F411.