Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik

Wintersemester 2009/2010
24.03.2010

Klausur zur Linearen Algebra I

Name: Max Mustermann **Matrikelnummer: 00/112233**
Übungsgruppe: Y **Erreichte Punktzahl: 64**

Prüfen Sie sofort **nach Beginn der Klausur**, ob Sie alle **8 Aufgaben** erhalten haben. Entfernen Sie nicht die Klammerung der Blätter. Tragen Sie auf dieser Seite und **bei jeder Aufgabe** Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppe ein. Schreiben Sie die Lösung zu einer Aufgabe nur auf die dafür vorgesehenen Blätter. Wenn Sie sich nicht ganz sicher sind und noch genug Zeit ist, empfiehlt es sich, die Lösung zunächst auf Ihr Schmierpapier zu schreiben. Vergessen Sie aber nicht, die Lösung rechtzeitig auf den Klausurbogen zu übertragen.

Soweit nichts anderes gesagt ist, gilt folgendes:

- Alle Antworten sind mathematisch zu begründen.
- Sofern nichts anderes gesagt ist, darf dabei auf mathematische Ergebnisse aus der Vorlesung und den Übungen zur Linearen Algebra I (WS 2009/10) verwiesen werden (zum Beispiel durch ein Stichwort wie „Homomorphiesatz“ oder durch kurze Beschreibung des Ergebnisses).
- Sie können die einzelnen Teilaufgaben einer Aufgabe in einer anderen als der vorgeschlagenen Reihenfolge bearbeiten und in jeder Teilaufgabe die erzielten (Zwischen-)Ergebnisse aus den vorher bearbeiteten Teilaufgaben verwenden.
- Bei Manipulation von Matrizen sind die durchgeführten Spalten- oder Zeilenoperationen stets anzugeben (im Stile der Vorlesung oder ähnlich, also etwa $Z_2 \leftrightarrow Z_4$ für Vertauschung der Zeilen 2 und 4 oder $Z_1 \leftarrow Z_1 - 7Z_2$ für Subtrahieren des 7-fachen der Zeile 2 von der Zeile 1).

Haben Sie irgendwelche Fragen, so zögern Sie nicht, sich (möglichst lautlos) bemerkbar zu machen. Ein Mitarbeiter wird zu Ihnen an den Platz kommen.

Die maximale Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.
Die maximal zu erreichende Punktzahl ist 64.

Die einzigen erlaubten Arbeits-/Hilfsmittel sind

- ein beidseitig von Hand beschriebenes Blatt im Format DIN A4 (210mm x 297mm) oder kleiner,
- konventionelles Schreibzeug,
- nicht beschriebenes Schmierpapier und
- eine Uhr (ohne eingebaute Kommunikationsgeräte).

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

Name: Max Mustermann **Matrikelnummer: 00/112233**
Übungsgruppe: Y **Erreichte Punktzahl: 64**

Aufgabe 1: (9 Punkte)

Betrachten Sie die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 5 & 5 & -3 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{3\times 3}.$$

(a) Berechnen Sie die Determinante der Matrix A.

(b) Zeigen Sie, dass A in $\mathbb{Z}^{3\times 3}$ invertierbar ist.

(c) Bestimmen Sie die Komatrix $\operatorname{com}(A) \in \mathbb{Z}^{3\times 3}$ von A.

(d) Bestimmen Sie die zu A inverse Matrix A^{-1}.

(e) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des folgenden inhomogenen linearen Gleichungssystems:

$$Ax = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (x \in \mathbb{Q}^3).$$

Lösung 1:

(a) Entwicklung nach der ersten Spalte: $\det A = 1 \cdot (5-3) + (-1) \cdot 5 \cdot (2-1) + (-2) \cdot (-6+5) = -1$.

(b) Wegen $\det A \in \mathbb{Z}^\times$ gilt, dass A in $\mathbb{Z}^{3\times 3}$ invertierbar ist (ÜA). (Achtung! Es wurde nicht nach der Invertierbarkeit in $\mathbb{Q}^{3\times 3}$ gefragt.) Man sieht dies alternativ auch nach dem Berechnen der inversen Matrix in (d).

(c) Für $i, j \in \{1,2,3\}$ entstehe die Matrix A_{ij} aus der Matrix A durch Streichen der i-ten Zeile und der j-ten Spalte.

$$\operatorname{com}(A) = ((-1)^{i+j} \det A_{ij})_{1\le i,j\le 3} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -1 & -1 & -3 \\ -1 & -2 & -5 \end{pmatrix}.$$

(d) Es gilt nach der Vorlesung: $A^{-1} = (\det A)^{-1} \operatorname{com}(A)^{\mathrm{T}}$. Somit gilt

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ -5 & 3 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{3\times 3}.$$

(e) Da A invertierbar ist, gibt es genau eine Lösung des inhomogenen LGS, nämlich

$$A^{-1} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Name: Max Mustermann **Matrikelnummer: 00/112233**
Übungsgruppe: Y **Erreichte Punktzahl: 64**

Aufgabe 2: (10 Punkte)

Seien $f\colon A \to B$ und $g\colon B \to C$ Abbildungen. Zeigen Sie durch einen kurzen Beweis oder widerlegen Sie durch ein konkretes Gegenbeispiel, jeweils *ohne* Ergebnisse aus den Übungen zu verwenden:

(a) Ist f nicht injektiv, so ist f surjektiv.

(b) Ist $g \circ f$ surjektiv, so ist f surjektiv.

(c) Ist $g \circ f$ injektiv, so ist f injektiv.

(d) Gilt $C = A$ und gilt $f \circ g = \mathrm{id}_B$, so ist f bijektiv.

(e) Gilt $C = A$, ist f bijektiv und gilt $f \circ g = \mathrm{id}_B$, so gilt $g = f^{-1}$.

Lösung 2:

(a) Gegenbeispiel: $f\colon \{1,2\} \to \{1,2\}$, $1, 2 \mapsto 1$ ist weder injektiv noch surjektiv.

(b) Gegenbeispiel: $f\colon \{1,2\} \to \{1,2,3\}$, $x \mapsto x$ $(x \in \{1,2\})$, $g\colon \{1,2,3\} \to \{1,2\}$, $1, 3 \mapsto 1$, $2 \mapsto 2$. Es ist $g \circ f$ surjektiv, f aber nicht.

(c) Seien $a, a' \in A$ mit $f(a) = f(a')$. Da g eine Abbildung ist, gilt auch $g(f(a)) = g(f(a'))$. Somit folgt aus der Injektivität von $g \circ f$, dass $a = a'$ gilt. Also ist auch f injektiv.

(d) Gegenbeispiel: Man nehme das Beispiel aus Teil (b) und vertausche die Bezeichnung der beiden Abbildungen (f ist das g aus (b) und g ist das f aus (b)).

(e) Es gilt wegen der in der Vorlesung gezeigten Assoziativität von Abbildungen

$$f^{-1} = f^{-1} \circ \mathrm{id}_B = f^{-1} \circ (f \circ g) = (f^{-1} \circ f) \circ g = \mathrm{id}_A \circ g = g.$$

Name: Max Mustermann **Matrikelnummer: 00/112233**
Übungsgruppe: Y **Erreichte Punktzahl: 64**

Aufgabe 3: (4 Punkte)

Seien M und N Mengen mit $N \subsetneq M$ (es sei also N eine *echte* Teilmenge von M, das heißt $\cancel{M \subseteq N}$ $N \subseteq M$ aber $M \neq N$) und $x \in N$. Entscheiden Sie, ob die folgenden Abbildungen injektiv bzw. surjektiv sind. Falls Sie zum Schluss kommen, dass sie es *nicht* sind, so geben Sie eine *kurze* Begründung an.

Für jede richtige Antwort (mit richtiger Begründung) gibt es einen halben Punkt. Für jede falsche *Ja*–Antwort gibt es einen halben Punkt Abzug, für jede falsche bzw. unzureichend begründete *Nein*–Antwort und jede unbeantwortete Frage gibt es keinen Punkt. Die Aufgabe wird mindestens mit 0 Punkten gewertet.

Abbildung	(i) injektiv? (ii) surjektiv?	Begründung, falls nicht
$f_1 \colon \mathcal{P}(M) \longrightarrow \mathcal{P}(N),\ A \mapsto A \cap N$	(i) nein (ii) ja	$f_1(M) = M \cap N = N = N \cap N = f_1(N)$, aber $M \neq N$.
$f_2 \colon \mathcal{P}(N) \longrightarrow \mathcal{P}(M),\ A \mapsto A$	(i) ja (ii) nein	$M \notin \mathrm{im}(f_2) = \mathcal{P}(N)$.
$f_3 \colon \mathcal{P}(N) \longrightarrow \mathcal{P}(N),\ A \mapsto A \cup \{x\}$	(i) nein (ii) nein	$f_3(N \setminus \{x\}) = N = f_3(N)$. $\varnothing \notin \mathrm{im}(f_3)$, da $x \notin \varnothing$.
$f_4 \colon \mathcal{P}(N) \longrightarrow \mathcal{P}(N),\ A \mapsto A \setminus \{x\}$	(i) nein (ii) nein	$f_4(\varnothing) = \varnothing = f_4(\{x\})$. $N \notin \mathrm{im}(f_4)$.

Name: Max Mustermann **Matrikelnummer: 00/112233**
Übungsgruppe: Y **Erreichte Punktzahl: 64**

Aufgabe 4: (6 Punkte)

Entscheiden Sie, ob folgende Behauptungen wahr sind. Falls Sie zum Schluss kommen, dass sie *falsch* sind, so geben Sie eine *kurze* Begründung an.

Für jede richtige Antwort (mit richtiger Begründung) gibt es einen Punkt. Für jede falsche *Ja*–Antwort gibt es einen Punkt Abzug, für jede falsche bzw. nicht begründete *Nein*–Antwort und jede unbeantwortete Frage gibt es keinen Punkt. Die Aufgabe wird mindestens mit 0 Punkten gewertet.

Aussage	Wahr?	Begründung, falls nicht
Ist $\mathbb{F}$ ein endlicher Körper mit m Elementen, so ist $a^{m-1} = 1$ für alle $a \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$.	ja	
In $\mathbb{F}_9$ gibt es Elemente $x, y \neq 0$ mit $x \cdot y = 0$.	nein	$\mathbb{F}_9$ ist ein Körper, und in Körpern gibt es solche Elemente nicht (ÜA).
Eine Abbildung $G \longrightarrow H$ zwischen zwei abelschen Gruppen G und H bildet 0_G stets auf 0_H ab.	nein	Nicht jede Abbildung zwischen abelschen Gruppen ist ein Gruppenhomomorphismus: $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto x+1$.
Jede lineare Abbildung zwischen zwei Vektorräumen ist ein Gruppenhomomorphismus zwischen den zugrundeliegenden abelschen Gruppen.	ja	
Jede Kongruenzrelation auf einer abelschen Gruppe $(G, +)$ ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge G.	ja	
Für alle $u \in \mathbb{Q}^2$ ist $v \equiv w :\iff$ (es existiert ein $m \in \mathbb{Z}$ mit $v = w + mu$) eine Kongruenzrelation auf dem $\mathbb{Q}$–Vektorraum $\mathbb{Q}^2$.	nein	Sei $u = (1, 0)$. Dann gilt $(1, 0) \equiv (2, 0)$, aber auch $\frac{1}{2}(1, 0) = (\frac{1}{2}, 0) \not\equiv (1, 0) = \frac{1}{2}(2, 0)$.

Name: Max Mustermann **Matrikelnummer: 00/112233**
Übungsgruppe: Y **Erreichte Punktzahl: 64**

Aufgabe 5: (6 Punkte)

Bestimmen Sie durch Rechnen in einem geeigneten Quotientenring A/I (wobei A ein gegebener kommutativer Ring und I ein Ideal von A ist)

(a) den Rest von 12321892 bei Division durch 9 in $A := \mathbb{Z}$,
(b) den Rest von 182^{11} bei Division durch 3 in $A := \mathbb{Z}$,
(c) den Rest von $(X-1)^8$ bei Division durch $X^2 - 2X - 1$ in $A := \mathbb{R}[X]$.

Lösung 5:

(a) Wegen $10 \equiv_{(9)} 1$, gilt

$$12321892 \equiv_{(9)} 1+2+3+2+1+8+9+2 \equiv_{(9)} 28 \equiv_{(9)} 1.$$

(b) Es ist, wegen $182 = 3 \cdot 60 + 2$,

$$182^{11} \equiv_{(3)} 2^{11} \equiv_{(3)} 2^{10} \cdot 2^1 \equiv_{(3)} (2^2)^5 \cdot 2 \equiv_{(3)} 1^5 \cdot 2 \equiv_{(3)} 2.$$

(c) Wir setzen $I := (X^2 - 2X - 1)$ und rechnen

$$(X-1)^8 = (X^2 - 2X + 1)^4 = (X^2 - 2X - 1 + 2)^4 \equiv_I 2^4 \equiv_I 16.$$

Name: Max Mustermann **Matrikelnummer: 00/112233**
Übungsgruppe: Y **Erreichte Punktzahl: 64**

Aufgabe 6: (6 Punkte)

Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 5 \\ 1 & 5 & 3 & 4 \\ 1 & 7 & 5 & 2 \end{pmatrix} \in (\mathbb{F}_{11})^{4\times 4}.$$

Lösung 6:

Man kann folgendermaßen lösen:

Behauptung: Dies ist eine Vandermonde-Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & a_1^3 \\ 1 & a_2 & a_2^2 & a_2^3 \\ 1 & a_3 & a_3^2 & a_3^3 \\ 1 & a_4 & a_4^2 & a_4^3 \end{pmatrix}.$$

Beweis: Seien $a_1 := 2$, $a_2 := 3$, $a_3 := 5$ und $a_4 := 7$. Die Behauptung folgt aus folgenden Rechnungen: $3^3 = 27 = 5$, $5^2 = 25 = 3$, $5^3 = 5 \cdot 3 = 15 = 4$, $7^2 = 49 = 5$ und $7^3 = 7 \cdot 5 = 35 = 2$.

Demnach ist nach einer ÜA die Determinante gleich

$$\prod_{1 \leq i < j \leq 4} (a_j - a_i) = (3-2)(5-2)(5-3)(7-2)(7-3)(7-5) = 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 2 = 240 = 9.$$

Alternativ kann man die Aufgabe auch folgendermaßen lösen. Wir wenden Zeilenoperationen an und achten darauf inwiefern diese die Determinante verändern.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 5 \\ 1 & 5 & 3 & 4 \\ 1 & 7 & 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{lcl} z_2 & \leftarrow & z_2 - z_1 \\ z_3 & \leftarrow & z_3 - z_1 \\ z_4 & \leftarrow & z_4 - z_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 5 & -3 \\ 0 & 3 & -1 & -4 \\ 0 & 5 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{array}{lcl} z_3 & \leftarrow & z_3 - 2z_1 \\ z_4 & \leftarrow & z_4 - 5z_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 9 & 9 \end{pmatrix} \begin{array}{lcl} z_4 & \leftarrow & z_4 + 4z_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Keine der verwendeten Zeilenoperationen verändert die Determinante. Die erhaltene Matrix hat obere Dreicksgestalt, somit ist die Determinante dieser Matrix das Produkt der Diagonaleinträge. Wir erhalten, dass die Determinante $42 = 9$ in $\mathbb{F}_{11}$ ist.

Name: Max Mustermann **Matrikelnummer: 00/112233**
Übungsgruppe: Y **Erreichte Punktzahl: 64**

Aufgabe 7: (17 Punkte)

Es bezeichne $V := \mathbb{R}[X]_2$ den $\mathbb{R}$-Vektorraum aller Polynome vom Grad ≤ 2 in der Unbestimmten X. Es bezeichne $\underline{v} := (1, X, X^2)$ die Basis von V bestehend aus den Monomen.

(a) Zeigen Sie, dass $\underline{w} := (X^2, (1-X)X, (1-X)^2)$ auch eine Basis von V ist.

(b) Berechnen Sie die Basiswechselmatrizen $M(\underline{v}, \underline{w})$ und $M(\underline{w}, \underline{v})$.

(c) Betrachten Sie nun die lineare Abbildung

$$f\colon V \to V,\ p \mapsto p(1)X^2 + 4p\Big(\frac{1}{2}\Big)(1-X)X + p(0)(1-X)^2.$$

(Hierbei ist $p(a)$ die Auswertung des Polynoms p in $a \in \mathbb{R}$. Sie müssen die Linearität *nicht* nachprüfen.)
Geben Sie die Darstellungsmatrix $M(f, \underline{v}, \underline{w})$ an und berechnen Sie $M(f, \underline{v}, \underline{v})$ und $M(f, \underline{w}, \underline{w})$.

(d) Zeigen Sie, dass das charakteristische Polynom $\chi_f \in \mathbb{R}[X]$ von f gleich $-(X-1)^3$ ist.

(e) Bestimmen Sie das Minimalpolynom $\mu_f \in \mathbb{R}[X]$ von f.

(f) Entscheiden Sie, ob f trigonalisierbar ist.

(g) Entscheiden Sie, ob f diagonalisierbar ist.

Lösung 7:

Wir notieren zunächst: $(1-X)X = X - X^2$ und $(1-X)^2 = 1 - 2X + X^2$ $(*)$.

(a) Wir zeigen, dass $\underline{w}$ ein Erzeugendensystem von V der Länge $\dim V = 3$ ist. Dabei genügt es zu zeigen, dass 1, X und X^2 von $\underline{w}$ erzeugt werden.

$$\begin{aligned}
1 &= 1\cdot X^2 + 2\cdot(1-X)X + 1\cdot(1-X)^2,\\
X &= 1\cdot X^2 + 1\cdot(1-X)X,\\
X^2 &= 1\cdot X^2.
\end{aligned}$$

(b)

$$M(\underline{v}, \underline{w}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{(folgt aus (a))},$$

$$M(\underline{w}, \underline{v}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(folgt aus } (*)\text{)}.$$

(c)

$$M(f, \underline{v}, \underline{w}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$M(f, \underline{w}, \underline{w}) = M(f, \underline{v}, \underline{w}) \cdot M(\underline{w}, \underline{v}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$M(f, \underline{v}, \underline{v}) = M(\underline{w}, \underline{v}) \cdot M(f, \underline{v}, \underline{w}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(d) Wir berechnen das charakteristische Polynom der Matrix $M(f, \underline{w}, \underline{w})$. Alternativ könnte man auch das charakteristische Polynom der Matrix $M(f, \underline{v}, \underline{v})$ bestimmen. Keinesfalls ist jedoch zulässig, die Matrix $M(f, \underline{v}, \underline{w})$ zu verwenden, da beide Basen übereinstimmen müssen. Es ist

$$\begin{aligned}\chi_f(X) &= \det \begin{pmatrix} 1-X & 0 & 0 \\ 1 & 1-X & 1 \\ 0 & 0 & 1-X \end{pmatrix} \\ &= (1-X) \cdot ((1-X)(1-X) - 0) \\ &= (1-X)^3 = -(X-1)^3\end{aligned}$$

(e) Wir wissen, dass $\chi_f = -(X-1)^3$ ist und dass μ_f ein Teiler von χ_f ist. Es ist also nicht abwegig, zu vermuten, dass $\mu_f = (X-1)^k$ für ein $k \in \{1,2,3\}$ ist (allerdings kann man nicht ohne weiteres ausschließen, dass es noch andere Teiler von χ_f gibt). Nun ist sicherlich $k \neq 1$, sonst wäre $f = \mathrm{id}_V$. Für $k = 2$ betrachten wir

$$(M(f, \underline{w}, \underline{w}) - I_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Also teilt μ_f das Polynom $(X-1)^2$. Damit gilt $\deg \mu_f \leq 2$. Man kann ähnlich wie oben aussschließen, dass μ_f Grad 1 hat, da sonst $\mu_f = X - \lambda$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$ wäre. Dies würde aber $f = \lambda \, \mathrm{id}_V$ bedeuten, was nicht der Fall ist.

(f) Es ist möglich f zu triagonalisieren, denn das charakteristische Polynom von f zerfällt in Linearfaktoren.

(g) Wäre f diagonalisierbar, so wäre die geometrische Vielfachheit des Eigenwerts 1 von f gleich der algebraischen Vielfachheit, und die ist 3. Dann wäre der Kern der Matrix

$$A := M(f, \underline{w}, \underline{w}) - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dreidimensional, also ganz V. Das würde $A = 0$ bedeuten, ein Widerspruch. Daher kann f nicht diagonalisierbar sein.

Name: Max Mustermann **Matrikelnummer: 00/112233**
Übungsgruppe: Y **Erreichte Punktzahl: 64**

Aufgabe 8: (6 Punkte)

Sei K ein Körper und $A \in K^{n\times n}$ eine quadratische Matrix. Wir nennen ein $\lambda \in K$ einen **Linkseigenwert** von A, wenn es einen Zeilenvektor $v \in K^n \setminus \{0\}$ mit $vA = \lambda v$ gibt. Wir nennen einen Zeilenvektor $v \in K^n \setminus \{0\}$ einen **Linkseigenvektor** von A, wenn es ein $\lambda \in K$ mit $vA = \lambda v$ gibt. Zeigen Sie durch einen kurzen Beweis oder widerlegen Sie durch ein konkretes Gegenbeispiel:

(a) Die Linkseigenwerte einer Matrix sind genau ihre Eigenwerte.

(b) Ein Zeilenvektor ist genau dann Linkseigenvektor einer Matrix, wenn der zugehörige Spaltenvektor ein Eigenvektor dieser Matrix ist.

Lösung 8:

(a) Ein $\lambda \in K$ ist genau dann ein Linkseigenwert von A, wenn ein $v \in K^n \setminus \{0\}$ existiert mit $vA = \lambda v$. Dies ist genau dann der Fall, wenn

$$A^T v^T = (vA)^T = (\lambda v)^T = v^T \lambda = \lambda v^T$$

gilt. Dies ist äquivalent dazu, dass λ ein Eigenwert von A^T ist. Es ist

$$\chi_A = \det(A - \lambda I_n) = \det(A - \lambda I_n)^T = \det(A^T - I_n^T \lambda^T) = \det(A^T - \lambda I_n) = \chi_{A^T}.$$

Wegen $\chi_A = \chi_{A^T}$ stimmen die Eigenwerte von A und A^T überein. Dies zeigt, dass die Linkseigenwerte und die üblichen Eigenwerte einer Matrix A übereinstimmen.

(b) Diese Aussage ist falsch. Als Gegenbeispiel betrachten wir $K = \mathbb{Q}$ und

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad v = (0, 1).$$

Nun ist $vA = v$, also ist v ein Linkseigenvektor von A zum Linkseigenwert 1. Allerdings ist $Av^T = (1, 1)^T \neq \lambda v^T$ für alle $\lambda \in \mathbb{Q}$, was zeigt, dass v^T kein Eigenvektor von A ist.