Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Markus Schweighofer
Aaron Kunert / Sven Wagner

Wintersemester 2009/2010
Lösungsblatt 12
10.02.2010

Lineare Algebra I

Lösung 12.1:

Voraussetzung: Sei $n \in \mathbb{N}$.

Behauptung: Die Permutation

$$\pi\colon \{1,\dots,n\} \longrightarrow \{1,\dots,n\}, \quad i \mapsto n-i+1,$$

hat Fehlstände $\frac{n^2-n}{2}$ und Signatur 1 genau dann, wenn $n \bmod 4 \in \{0,1\}$.

Beweis: Ist $1 \leq i < j \leq n$, so ist $\pi(i) = n-i+1 > n-j+1 = \pi(j)$. Daher ist die Anzahl der Fehlstände von π gleich der Anzahl der Paare (i,j) mit $1 \leq i < j \leq n$. Diese lassen sich wie folgt zählen. Wir betrachten zuerst die größere Menge $M := \{(i,j) \mid 1 \leq i,j \leq n\}$. Diese hat n^2 viele Elemente, da es n Möglichkeiten für die Wahl von i gibt und jeder dieser Möglichkeiten führt zu n Möglichkeiten j zu wählen. Dann aber hat die Menge

$$N := \{(i,j) \mid 1 \leq i,j \leq n, i \neq j\} = M \setminus \{(i,j) \in M \mid i = j\}$$

genau $n^2 - n$ Elemente. Nun enthält N genau doppelt soviele Elemente, als gesucht, denn ist $i < j$ so enthält N die Paare (i,j) und (j,i). Damit ist die Anzahl der Fehlstände gleich $\frac{n^2-n}{2}$. Dann ist aber die Signatur gleich $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$. Ist $n = 4k$ für ein $k \in \mathbb{N}$, so ist die Anzahl der Fehlstände offensichtlich gerade, also ist die Signatur 1. Das gleiche gilt, wenn $n = 4k+1$ für ein $k \in \mathbb{N}$ ist. Gilt $n = 4k+2$ für ein $k \in \mathbb{N}$, so ist sowohl $\frac{n}{2}$ als auch $n-1$ ungerade, somit auch die Anzahl der Fehlstände. Gilt $n = 4k+3$, so sind n und $\frac{n-1}{2}$ ungerade, also auch die Anzahl der Fehlstände. In beiden Fällen ist damit die Signatur -1.

Lösung 12.2:

Voraussetzung: Seien f und g Endomorphismen eines endlichdimensionalen Vektorraums V.

Behauptung:

1. Die Determinante von f ist genau dann ungleich 0, wenn f bijektiv ist.
2. $\det(f \circ g) = (\det f)(\det g)$.

Beweis: Sei $\underline{v}$ eine beliebige Basis von V. Dann ist die Determinante eines Endomorphismus von V gleich der Determinante der Darstellungsmatrix bezüglich v.

1. f ist genau dann bijektiv, wenn die zugehörige Darstellungsmatrix invertierbar ist. Dies ist aber genau dann der Fall, wenn ihre Determinante ungleich 0 ist. (Beide Aussagen sind in der Vorlesung zu finden.)
2. Die Hintereinanderschaltung von Endomorphismen entspricht der Multiplikation ihrer Darstellungsmatrizen. Für Matrizen gilt, dass die Determinantenabbildung multiplikativ ist. (Beide Aussagen kann man wieder der Vorlesung entnehmen.)

Lösung 12.3:

Voraussetzung: Sei $n \in \mathbb{N}$, und sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit ganzzahligen Koeffizienten. Außerdem sei A invertierbar.

Behauptung: Es sind genau dann alle Koeffizienten von A^{-1} ganzzahlig, wenn $|\det A| = 1$ gilt.

Beweis: Nehmen wir zuerst an, dass alle Koeffizienten von A^{-1} ganzzahlig sind. Da auch die Koeffizienten von A ganzzahlig sind, sind nun sowohl die Determinante von A als auch die Determinante von A^{-1} ganzzahlig. Letzteres ist aber das multplikative Inverse von $\det A$. Also ist $\det A \in \mathbb{Z}^\times = \{-1, 1\}$.

Nehmen wir nun an, dass $|\det A| = 1$ gilt, also $\det A \in \{-1, 1\}$. Damit ist auch $(\det A)^{-1} \in \{-1, 1\}$. Es gilt $A^{-1} = (\det A)^{-1}(\operatorname{com} A)$. Da A nur ganzzahlige Koeffizienten hat, gilt dies auch für $\operatorname{com} A$. Insgesamt folgt also, dass auch die Koeffizienten von A^{-1} ganzzahlig sind.

Lösung 12.4:

Definition: Sei R ein kommutativer Ring. Eine Abbildung $\delta\colon R \to R$ heißt **Derivation**, wenn für alle $x, y \in R$ gilt:

(i) $\delta(x + y) = \delta(x) + \delta(y)$,

(ii) $\delta(xy) = x\delta(y) + \delta(x)y$.

Voraussetzung: Sei K ein Körper, und sei $D\colon K[X] \to K[X]$ die formale Ableitung.

Behauptung: D ist eine Derivation auf $K[X]$.

Beweis: Wegen der Linearität von D ist die erste Bedingung erfüllt. Wir zeigen nun, dass die zweite Bedingung auch gilt. Seien $p, q \in K[X]$. Nehmen wir an, dass sowohl der Grad von p als auch der Grad von q kleiner der gleich $d \in \mathbb{N}_0$ sind. Es gibt also $a_0, \ldots, a_d, b_0, \ldots, b_d \in K$ mit $p = \sum\limits_{i=0}^{d} a_i X^i$ und $q = \sum\limits_{i=0}^{d} b_i X^i$. Dann ist

$$\begin{aligned}
D(pq) &= D\left(\sum_{i=0}^{2d}\sum_{j=0}^{i} a_j b_{i-j} X^i\right) = \sum_{i=1}^{2d}\sum_{j=0}^{i} i a_j b_{i-j} X^{i-1} = \sum_{i=0}^{2d-1}\sum_{j=0}^{i+1} (i+1) a_j b_{(i+1)-j} X^i \\
&= \sum_{i=0}^{2d-1}\left(\sum_{j=0}^{i+1}(i+1-j) a_j b_{i+1-j} + \sum_{j=0}^{i+1} j a_j b_{i-(j-1)}\right) X^i \\
&= \sum_{i=0}^{2d-1}\sum_{j=0}^{i}(i+1-j) a_j b_{i+1-j} X^i + \sum_{i=0}^{2d-1}\sum_{j=0}^{i}(j+1) a_{j+1} b_{i-j} X^i \\
&= \left(\sum_{i=0}^{d} a_i X^i\right)\left(\sum_{i=0}^{d-1}(i+1) b_{i+1} X^i\right) + \left(\sum_{i=0}^{d-1}(i+1) a_{i+1} X^i\right)\left(\sum_{i=0}^{d} b_i X^i\right) \\
&= \left(\sum_{i=0}^{d} a_i X^i\right)\left(\sum_{i=1}^{d} i b_i X^{i-1}\right) + \left(\sum_{i=1}^{d} i a_i X^{i-1}\right)\left(\sum_{i=0}^{d} b_i X^i\right) = pD(q) + D(p)q.
\end{aligned}$$

Lösung 12.5:

(a)
- die Drehungen R_φ ($\varphi \in \mathbb{R}$): Die Darstellungsmatrix bzgl. der Standardbasis ist (vgl. §7.1)
$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$
Deren Determinante ist $(\cos\varphi)^2 + (\sin\varphi)^2 = 1$.
- die Spiegelungen R an den Koordinatenachsen: Die Spiegelung an der $(1,0)$– bzw. $(0,1)$–Achse hat die Darstellungsmatrix
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Beide Matrizen haben Determinante -1.
- die Projektionen P auf die Koordinatenachsen: Die Projektion auf die $(1,0)$– bzw. $(0,1)$–Achse hat die Darstellungsmatrix
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Beide Matrizen haben Determinante 0.
- die Scherungen S_a ($a \in \mathbb{R}$) an der ersten Koordinatenachse: Deren Darstellungsmatrix ist für $a \in \mathbb{R}$
$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Die Determinante dieser Matrix ist stets 1.
- die lineare Abbildungen f_A ($A \in K^{n\times n}$): Da A die Darstellungsmatrix (wieder bzgl. der Standardbasis) ist, gilt $\det f_A = \det A$.
- die formalen Ableitung $D^{(d)}$ ($d \in \mathbb{N}_0$): Die Darstellungsmatrix der formalen Ableitung ist
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & d-1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & d \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$
Die Determinante ist dabei stets 0.
- die komplexe Konjugation C: Deren Darstellungsmatrix ist bzgl. der Basis $(1, \mathring{\imath})$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
Die Determinante dieser Matrix ist -1.

(b) Voraussetzung: Sei K ein Körper.
Zum Bestimmen der Determinante der Matrix
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in K^{5\times 5}.$$

überführen wir diese in obere Dreiecksgestalt.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{lcl} z_1 & \leftarrow & z_1 - z_5 \\ z_2 & \leftarrow & z_2 - z_5 \\ z_3 & \leftarrow & z_3 - z_5 \\ z_4 & \leftarrow & z_4 - z_5 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad z_5 \quad \leftrightarrow \quad z_5 + z_1 + z_2 + z_3 + z_4$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Laut Vorlesung hat keine der Zeilenoperationen einen Einfluss auf die Determinante der Matrix. Um die Determinante der ursprünglichen Matrix zu erhalten, müssen wir die Determinante der oberen Dreiecksmatrix bestimmen. Wir erhalten also, dass die Determinante 4 ist.

(c) Voraussetzung: Sei K ein Körper.
Die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} -X & 5 & -1 \\ 1 & 1-X & 0 \\ 3 & 3 & -2-X \end{pmatrix} \in K[X]^{3\times 3}$$

ist nach der Regel von Sarrus

$$-X(1-X)(-2-X)-0-5(-2-X)+0+(-1)3-(-1)(1-X)3 = -X^3-X^2+4X+10.$$

(d) Voraussetzung: Sei K ein Körper, sei $n \in \mathbb{N}$, und seien $a_1, \dots, a_n \in K$.
Behauptung: Für die $n \times n$–Vandermonde–Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

gilt die Gleichung $\det(A) = \prod\limits_{1\leq i<j\leq n} (a_j - a_i)$.

Beweis: Wie im Hinweis gegeben, schließen wir mit Induktion nach n. Ist $n = 1$, so ist $A = (1)$ und es ist $\det(A) = 1$ Anderseits ist für $n = 1$ das Produkt $\prod_{i<j}(a_j - a_i)$ gerade das leere Produkt, das nach Definition den Wert 1 hat.

Sei die Aussage für die Zahl n richtig, wir betrachten den Fall $n+1$. Die zugehörige Vandermondematrix ist

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} & a_1^n \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} & a_2^n \\ 1 & a_3 & a_3^2 & \dots & a_3^{n-1} & a_3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_{n+1} & a_{n+1}^2 & \dots & a_{n+1}^{n-1} & a_{n+1}^n \end{pmatrix}.$$

Wie im Hinweis angegeben ziehen wir das a_1-fache der n-ten Spalte von der letzten Spalte ab. Somit erhalten wir

$$\begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} & 0 \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} & a_2^n - a_1 a_2^{n-1} \\ 1 & a_3 & a_3^2 & \dots & a_3^{n-1} & a_3^n - a_1 a_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_{n+1} & a_{n+1}^2 & \dots & a_{n+1}^{n-1} & a_{n+1}^n - a_1 a_{n+1}^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Iterieren wir weiter indem wir jeweils das a_1- fache der $(j-1)$-ten Spalte von der j-ten Spalte abziehen erhalten wir schließlich

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & a_2 - a_1 & a_2^2 - a_1 a_2 & \dots & a_2^{n-1} - a_1 a_2^{n-2} & a_2^n - a_1 a_2^{n-1} \\ 1 & a_3 - a_1 & a_3^2 - a_1 a_3 & \dots & a_3^{n-1} - a_1 a_3^{n-2} & a_3^n - a_1 a_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_{n+1} - a_1 & a_{n+1}^2 - a_1 a_{n+1} & \dots & a_{n+1}^{n-1} - a_1 a_{n+1}^{n-2} & a_{n+1}^n - a_1 a_{n+1}^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Entwickelt man die Determinante nach der ersten Zeile, so erhält man

$$\det A = \det \begin{pmatrix} a_2 - a_1 & a_2^2 - a_1 a_2 & \dots & a_2^{n-1} - a_1 a_2^{n-2} & a_2^n - a_1 a_2^{n-1} \\ a_3 - a_1 & a_3^2 - a_1 a_3 & \dots & a_3^{n-1} - a_1 a_3^{n-2} & a_3^n - a_1 a_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n+1} - a_1 & a_{n+1}^2 - a_1 a_{n+1} & \dots & a_{n+1}^{n-1} - a_1 a_{n+1}^{n-2} & a_{n+1}^n - a_1 a_{n+1}^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Nun erkennt man, dass man aufgrund der Multilinearität (Linearität in allen Zeilen) der Determinante für $1 \leq k \leq n$ in der k-ten Zeile den Faktor $(a_{k+1} - a_1)$ herausziehen kann, es ist also

$$\det A = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \cdots (a_{n+1} - a_1) \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & a_2 & \dots & a_2^{n-2} & a_2^{n-1} \\ 1 & a_3 & \dots & a_3^{n-2} & a_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_{n+1} & \dots & a_{n+1}^{n-2} & a_{n+1}^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Nach Induktionsvoraussetzung gilt aber

$$\det \begin{pmatrix} 1 & a_2 & \dots & a_2^{n-2} & a_2^{n-1} \\ 1 & a_3 & \dots & a_3^{n-2} & a_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_{n+1} & \dots & a_{n+1}^{n-2} & a_{n+1}^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{2 \leq i < j \leq n+1} (a_j - a_i).$$

All diese Überlegungen zusammengefügt ergeben die Behauptung:

$$\det A = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \cdots (a_{n+1} - a_1) \prod_{2 \leq i < j \leq n+1} (a_j - a_i) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i).$$

(e) Vorausssetzung: Sei $a \in \mathbb{Q}$. Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{aligned} F_a \colon \mathbb{Q}[X]_4 &\longrightarrow \mathbb{Q}[X]_4 \\ p &\longmapsto D((X-a)p), \end{aligned}$$

wobei D die formale Ableitung auf $\mathbb{Q}[X]$ ist.
Behauptung: Für alle $a \in \mathbb{Q}$ ist die Determinante von F_a gleich 120.
Beweis: Sei $a \in \mathbb{Q}$. Eine sinnvolle Basis von $\mathbb{Q}[X]_4$ für dieses Problem ist

$$\underline{w} := \big(1, (X-a), (X-a)^2, (X-a)^3, (X-a)^4\big)\,.$$

Nun ist nicht per se klar, dass es sich bei $\underline{w}$ tatsächlich um eine Basis handelt. Allerdings hat das i-te Basiselement gerade den Grad i. Hat man also eine Linearkombination, die 0 ergibt, so muss der Koeffizient vor $(X-a)^4$ die 0 sein, da ansonsten kein Basiselement vom Grad 4 ist. Dieses Argument iteriert zeigt, dass jeder Koeffizient gleich 0 sein muss.
Nun berechnen wir die Bilder dieser Basis. Dabei nützen wir das Ergebnis der Aufgabe 12.4, das uns ermöglicht Produkte ohne vorheriges Ausmultiplizieren abzuleiten. Es ist

$$\begin{aligned}
F_a(1) &= D(X-a) = 1\\
F_a(X-a) &= D\big((X-a)^2\big) = 2(X-a)\\
F_a(X-a)^2 &= D\big((X-a)^3\big) = 3(X-a)^2\\
F_a(X-a)^3 &= D\big((X-a)^4\big) = 4(X-a)^3\\
F_a(X-a)^4 &= D\big((X-a)^5\big) = 5(X-a)^4.
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich die Darstellungsmatrix bezüglich $\underline{w}$ zu

$$M(F_a, \underline{w}, \underline{\,}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Also ist $\det F_a = \det M(F_a, \underline{w}, \underline{w}) = 5! = 120$.