Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Markus Schweighofer
Aaron Kunert / Sven Wagner

Wintersemester 2009/2010
Lösungsblatt 13
03.03.2010

Lineare Algebra I

Lösung 13.1:

Voraussetzung: Sei K ein Körper, sei V ein K–Vektorraum, und sei f ein Endomorphismus von V. Sei außerdem jeder Vektor $v \in V \setminus \{0\}$ ein Eigenvektor von f.

Behauptung: Es existiert ein $\lambda \in K$ mit $f = \lambda \operatorname{id}_V$.

Beweis: Es genügt zu zeigen, dass für zwei linear unabhängige Vektoren $v, w \in V$ aus $f(v) = \lambda v$ und $f(w) = \mu w$ stets $\lambda = \mu$ folgt. Dies zeigt man nun folgendermaßen: Es gilt für ein $\nu \in K$

$$\lambda v + \mu w = f(v) + f(w) = f(v + w) = \nu(v + w) = \nu v + \nu w.$$

Da v und w linear unabhängig sind, gilt damit aber $\lambda = \nu$ und $\mu = \nu$, woraus die gewünschte Gleichhheit folgt.

Lösung 13.2:

Voraussetzung: Sei K ein Körper, sei V ein endlichdimensionaler K–Vektorraum, und sei f ein Endomorphismus von V. Seien $E_1, \dots, E_m$ Eigenräume zu paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ von f.

Behauptung: Für jeden f–invarianten Untervektorraum W mit $W \subseteq E_1 + \cdots + E_m$ gilt die Identität

$$W = (W \cap E_1) + \cdots + (W \cap E_m)$$

und $f_{|W}$ ist diagonalisierbar.

Beweis: Die Inklusion $\supseteq$ ist klar. Wir müssen also die andere Inklusion zeigen: Wegen $W \subseteq E_1 + \cdots + E_m$ besitzt jedes $w \in W$ ein Darstellung $w = \sum\limits_{j=1}^{s} e_j$ mit $e_j \in E_j$ und $e_s \neq 0$.
Wir führen nun eine Induktion über die Länge s einer solchen Darstellung.
Ist $s = 1$, so gilt $w = e_1 \in W \cap E_1$. Es ist also nichts weiter zu zeigen. Wir nehmen nun an, die Behauptung wäre für ein $s < m$ gezeigt. Daraus wollen wir nun folgern, dass sie auch für $s + 1$ gilt. Wir haben also $w = \sum\limits_{j=1}^{s+1} e_j$ mit $e_j \in E_j$ und $e_{s+1} \neq 0$. Wenden wir nun f darauf an, so erhalten wir

$$f(w) = \sum_{j=1}^{s+1} f(e_j) = \sum_{j=1}^{s+1} \lambda_j e_j.$$

Da W ein f-invarianter Untervektorraum von V ist, gilt auch $f(w) \in W$. Somit liegt auch das folgende Element in W:

$$\lambda_{s+1} w - f(w) = \sum_{j=1}^{s} \underbrace{(\lambda_{s+1} - \lambda_j) e_j}_{\in E_j}.$$

Nach der Induktionsvoraussetzung liegen dann auch $(\lambda_{s+1} - \lambda_j)e_j$ $(1 \leq j \leq s)$ in W, und damit aber auch $e_1, \ldots, e_s$. Daraus folgt aber auch $e_{s+1} = w - e_1 - \cdots - e_s \in W$, und wir haben die erste Aussage gezeigt.

Aus der eben bewiesenen Gleichheit, folgt aber sofort die zweite Aussage. Man wählt einfach für jedes $j \in \{1, \ldots, m\}$ eine Basis von $W \cap E_j$, die nur aus Eigenvektoren von f besteht. Da die Summe $W = W = (W \cap E_1) + \cdots + (W \cap E_m)$ direkt ist, erhalten wir durch Vereinigung dieser Bases eine Basis von W, die nur aus Eigenvektoren von f besteht. Also ist $f_{|W}$ diagonalisierbar.

Lösung 13.3:

Voraussetzung: Seien K ein Körper, V ein endlichdimensionaler K–Vektorraum und f, g Endomorphismen von V mit $f \circ g = g \circ f$.

Behauptung:

(a) Die Eigenräume von f sind g–invariant.

(b) Sind f und g beide diagonalisierbar, so gibt es eine Basis von V, die nur aus Vektoren besteht, die sowohl Eigenwerte von f als auch von g sind.

Beweis:

(a) Sei v ein Eigenvektor von f zum Eigenwert λ. Dann gilt

$$f(g(v)) = g(f(v)) = g(\lambda v) = \lambda g(v).$$

Also ist auch $g(v)$ ein Eigenvektor von f zum Eigenwert λ.

(b) Ist g diagonalisierbar, so gibt es eine Zerlegung von V in Eigenräume von g:

$$V = E_{g,\mu_1} \oplus \cdots \oplus E_{g,\mu_r}.$$

Ist E ein Eigenraum von f, so ist dieser nach Teilaufgabe a) g–invariant. Damit gilt nach Aufgabe 13.2:

$$E = (E \cap E_{g,\mu_1}) \oplus \cdots \oplus (E \cap E_{g,\mu_r}).$$

Ist f auch diagonalisierbar, so gibt es eine Zerlegung von V in Eigenräume von f:

$$V = E_{f,\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{f,\lambda_s}.$$

Insgesamt gilt also:

$$V = \bigoplus_{j=1}^{s} \left((E_{f,\lambda_j} \cap E_{g,\mu_1}) \oplus \cdots \oplus (E_{f,\lambda_j} \cap E_{g,\mu_r}) \right).$$

Man wähle nun für alle $j \in \{1, \ldots, s\}$ und alle $k \in \{1, \ldots, r\}$ eine Basis von $E_{f,\lambda_j} \cap E_{g,\mu_k}$ und vereinige alle diese Basen. Jede dieser Basen enthält nur Vektoren, die sowohl Eigenvektoren von f als auch von g sind, somit gilt dies auch für die Vereinigung.

Lösung 13.4:

a) Wir bestimmen zunchst das charakteristische Polynom dieser Matrix. Es ist

$$\chi(X) = \det \begin{pmatrix} 6-X & 1 & 5 \\ 8 & 1-X & 4 \\ -6 & -2 & -7-X \end{pmatrix} = -X^3 + 13X - 12.$$

Die Nullstellen berechnen sich zu $\lambda_1 = -4, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 3$. Dann berechnet man die jeweiligen Eigenräume der Matrix, indem wir den Eigenwert auf der Diagonalen abziehen und dann den Kern bestimmen. Wir beginnen mit $\lambda_1 = -4$ Es ist

$$\begin{pmatrix} 10 & 1 & 5 \\ 8 & 5 & 4 \\ -6 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{array}{ccl} z_2 & \leftarrow & 10z_2 - 8z_1 \\ z_3 & \leftarrow & 10z_3 + 6_1 \end{array} \begin{pmatrix} 10 & 1 & 5 \\ 0 & 42 & 0 \\ 0 & -12 & 0 \end{pmatrix}$$

Wir erhalten damit die reduzierte Zeilenstufenform

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und somit den Eigenvektor $v_1 = (-1, 0, 2)^T$. Mit den anderen Eigenwerten verfährt man analog und erhält die Eigenvektoren $v_2 = (-1, -5, 2)^T$ und $v_3 = (-1, -2, 1)^T$ zu den Eigenwerten $\lambda_2 = 1$ beziehungsweise $\lambda_3 = 3$. Wir erhalten also,

$$\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Wir setzen die drei Eigenvektoren zu einer Basis $\underline{v} = (v_1, v_2, v_3)$ zusammen. Damit ergeben sich die Matrizen T und T^{-1} gerade als die Basiswechselmatrizen zwischen $\underline{v}$ und der Standardbasis. Es ist

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -5 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

die Matrix T erhält man durch Inversenbildung aus der Matrix T^{-1}:

$$T = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -5 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

b) Um das charakteristische Polynom zu bestimmen, entwickeln wir die die Determinante nach der ersten Spalte.

$$\det \begin{pmatrix} 1-X & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1-X & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1-X & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1-X & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1-X \end{pmatrix}$$

$$= (1-X)\det\begin{pmatrix} 1-X & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1-X & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1-X & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1-X \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1-X & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1-X & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1-X \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= (1-X)\left((1-X)\det\begin{pmatrix} 1-X & 1 & 0 \\ 1 & 1-X & 1 \\ 0 & 1 & 1-X \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1-X & 1 \\ 0 & 1 & 1-X \end{pmatrix}\right) \\ &\quad - \left(\det\begin{pmatrix} 1-X & 1 & 0 \\ 1 & 1-X & 1 \\ 0 & 1 & 1-X \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1-X & 1 \\ 0 & 1 & 1-X \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

Es genügt also, die vier übriggebliebenen, kleineren 3×3–Determinanten zu bestimmen. Da die letzte eine Nullzeile enthält verschwindet diese offensichtlich. Die übrigen Determinanten ergeben sich zu

$$\det\begin{pmatrix} 1-X & 1 & 0 \\ 1 & 1-X & 1 \\ 0 & 1 & 1-X \end{pmatrix} = (1-X)^3 - 2(1-X) = (1-X)\left((1-X)^2-2\right)$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1-X & 1 \\ 0 & 1 & 1-X \end{pmatrix} = (1-X)^2 - 1.$$

Damit erhalten wir für das charakteristische Polynom

$$\begin{aligned} \chi(X) &= (1-X)\left((1-X)^2\left((1-X)^2-2\right) - (1-X)^2+1\right) - (1-X)\left((1-X)^2-2\right) \\ &= (1-X)\left((1-X)^2\left((1-X)^2-2\right) - (1-X)^2+1-\left((1-X)^2-2\right)\right) \\ &= (1-X)\left((1-X)^4 - 2(1-X)^2 - (1-X)^2 + 1 - (1-X)^2 + 2\right) \\ &= (1-X)\left((1-X)^4 - 4(1-X)^2 + 3\right) \end{aligned}$$

Haben wir das charakteristische Polynom auf diese Form gebracht, so lassen sich die Nullstellen recht gut ablesen: Offensichtlich ist $X_1 = 1$ eine Nullstelle. die anderen Nullstellen ergeben sich, wenn man $(1-X)^2$ durch t ersetzt. Dies führt zu der Gleichung $t^2 - 4t + 3 = 0$, deren Lösung durch $t_1 = 3$ und $t_2 = 1$ gegeben ist. Damit erhält man als Eigenwerte

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1 \\ \lambda_2 &= 0 \\ \lambda_3 &= 2 \\ \lambda_4 &= 1+\sqrt{3} \\ \lambda_5 &= 1-\sqrt{3} \end{aligned}$$

Die Eigenvektoren bestimmt man, indem man die Eigenwerte auf der Diagonalen abzieht und dann den Kern der Matrix berechnet. Exemplarisch wird dies für $\lambda_1 = 1$

vorgeführt:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Zeilen vertauschen:} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad z_2 \leftarrow z_2 - z_3 - z_5$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad z_1 \leftarrow z_1 - z_4 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Damit ergibt sich der Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$ zu $v_1 = (1, 0, -1, 0, 1)^T$. Die andern Eigenvektoren sind (bis auf ein Vielfaches)

$$\begin{aligned} \lambda_2 = 0: &\quad v_2 = (-1, 1, 0, -1, 1)^T \\ \lambda_3 = 2: &\quad v_3 = (-1, -1, 0, 1, 1)^T \\ \lambda_4 = 1 + \sqrt{3}: &\quad v_4 = (1, \sqrt{3}, 2, \sqrt{3}, 1)^T \\ \lambda_5 = 1 - \sqrt{3}: &\quad v_5 = (1, -\sqrt{3}, 2, -\sqrt{3}, 1)^T. \end{aligned}$$

c) Wir bestimmen zunächst das charakteristische Polynom, in Abhängigkeit von a und b. Es ist

$$\chi(X) = \det \begin{pmatrix} -3 - X & 0 & 0 \\ 2a & b - X & a \\ 10 & 0 & 2 - X \end{pmatrix} = (-3 - X)(b - X)(2 - X)$$

Damit erhalten wir die Eigenwerte $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = b, \lambda_3 = 2$. Ist b verschieden von 2 und -3, so sind alle drei Eigenwerte verschieden und die Matrix ist diagonalisierbar, da Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten automatisch linear unabhängig sind. Betrachten wir also die Fälle, in denen $b = 2$ oder $b = -3$ ist. Sei zunächst $b = -3$. Wir betrachten den Eigenraum zu $\lambda_1 = \lambda_2 = -3$. Wir ziehen -3 auf der Diagonalen ab und erhalten die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2a & 0 & a \\ 10 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Man erkennt, dass diese Matrix unabhängig von a den Rang 1 hat, damit hat der zugehörige Eigenraum die Dimension 2 und die Matrix ist für jede Wahl von a diagonalisierbar. Sei nun $b = 2$. Wir ziehen $\lambda = 2$ von der Diagonalen ab und erhalten die Matrix

$$\begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 2a & 0 & a \\ 10 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ist $a \neq 0$, so hat diese Matrix den Rang 2 und ist daher nicht diagonalisierbar. Ist jedoch $a = 0$, so hat die Matrix den Rang 1 und die Matrix lässt sich diagonalisieren. Die Matrix ist also genau dann nicht diagonalisierbar, wenn $b = 1$ und $a \neq 0$ ist.

d) Offenbar kommutieren beide Matrizen, nach Aufgabe 13.3 existiert also ein System simultaner Eigenvektoren (falls beide diagonalisierbar sind). Bestimmen wir zuerst Eigenwerte und Eigenräume beider Matrizen. Es ist

$$\chi_A(X) = (1-X)^2(2-X), \quad \chi_B(X) = (1-X)(X^2 - 3X - 10).$$

Dies ergibt für A die Eigenwerte $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$ und für B die Eigenwerte $\mu_1 = 1, \mu_2 = -2, \mu_3 = 5$. Besonders interessant sind hier die Eigenwerte von B, da sie alle verschieden sind, liegt die Basis bestehend aus Eigenvektoren von B schon fest (bis auf skalara Vielfache). Aufgabe 13.3 garantiert uns, sollte auch A diagonalisierbar sein, dass dies auch eine Basis von Eigenvektoren von A ist. Wir bestimmen nun die Eigenvektoren von B mit der üblichen Methode und erhalten $v_1 = (0,0,1)^T, v_2 = (-1,1,1)^T, v_3 = (4,3,-4)^T$. Wir überzeugen uns, dass diese Vektoren auch Eigenvektoren der Matrix A sind. Nachrechnen zeigt, dass $Av_1 = 2v_1$, $Av_2 = v_2$ und $Av_3 = v_3$ gilt. Damit ist $\underline{v} = (v_1, v_2, v_3)$ eine Basis aus simultanen Eigenvektoren von A und B. Die Matrix T^{-1} ergibt sich dann zu

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Durch Inversenbildung von T^{-1} erhalten wir damit die gesuchten Matrizen T und $D_{1,2}$:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -\frac{3}{7} & \frac{4}{7} & 0 \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & 0 \end{pmatrix}, \quad D_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Lösung 13.5:

a) Wir zeigen die Aussage durch Induktion nach n. Es ist $f_2 = f_1 + f_0 = 1$. Daher ist die Aussage richtig für $n = 1$. Nehmen wir also an, dass die Aussage für ein bestimmtes n gültig ist. Wir erhalten dann

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n+1} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} f_{n+1} + f_n & f_{n+1} \\ f_n + f_{n-1} & f_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} f_{n+2} & f_{n+1} \\ f_{n+1} & f_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Was die Behauptung zeigt.

b) Wir diagonalisieren die Matrix mit den üblichen Methoden. Das charakteristische Polynom ist $\chi(X) = X^2 - X - 1$. Dessen Nullstellen sind

$$\phi_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}, \quad \phi_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}.$$

Wir beachten, dass $\phi_1 \cdot \phi_2 = -1$ gilt, also ist insbesondere $\phi_1^{-1} = -\phi_2$. Wir lösen das homogene LGS

$$\begin{pmatrix} 1-\phi_1 & 1 \\ 1 & -\phi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_2 & 1 \\ 1 & -\phi_1 \end{pmatrix}.$$

Multiplikation der ersten Zeile mit $-\phi_1$ und Subtraktion der ersten Zeile von der zweiten liefert den ersten Eigenvektor $v_1 = (\phi_1, 1)^T = (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}, 1)^T$. Auf ähnlichem Wege erhält man den zweiten Basisvektor $v_2 = (\phi_2, 1)^T = (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}, 1)^T$. Wir erhalten somit die Matrizen

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} & \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5}\sqrt{5} & \frac{1}{2} - \frac{1}{10}\sqrt{5} \\ -\frac{1}{5}\sqrt{5} & \frac{1}{2} + \frac{1}{10}\sqrt{5} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

c) Es ist

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= (TDT^{-1})^n \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= TD^nT^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \phi_1^n & 0 \\ 0 & \phi_2^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{5}\sqrt{5} & \frac{1}{2} - \frac{1}{10}\sqrt{5} \\ -\frac{1}{5}\sqrt{5} & \frac{1}{2} + \frac{1}{10}\sqrt{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{5}\sqrt{5}\phi_1^n \\ -\frac{1}{5}\sqrt{5}\phi_2^n \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Durch vergleich der zweiten Zeile erhalten wir die explizite Formel

$$f_n = \frac{1}{5}\sqrt{5}(\phi_1^n - \phi_2^n)$$

Lösung 13.6:

Voraussetzung: Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$–Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und zugehöriger Norm $\| \cdot \|$.

Behauptung:

(a) Ist $f\colon V \longrightarrow V$ ein Endomorphismus, für den $\|x\| = \|f(x)\|$ für alle $x \in V$ gilt, so ist f bijektiv.

(b) Ist U ein Untervektorraum von V, so ist $(U^\perp)^\perp = U$.

Beweis:

(a) Sei $f\colon V \longrightarrow V$ ein Endomorphismus, für den $\|x\| = \|f(x)\|$ für alle $x \in V$ gilt. Für die Bijektivität im Falle eines Endomorphismus, genügt es laut Vorlesung zu zeigen, dass f injektiv, also $\ker f = \{0\}$, ist. Sei $x \in \ker f$. Aus $\|x\| = \|f(x)\| = \|0\| = 0$ folgt sofort $x = 0$.

(b) Sei U ein Untervektorraum von V. Ist $u \in U$, so gilt für alle $v \in U^\perp$. dass $\langle u, v\rangle = 0$. Somit ist $u \in (U^\perp)^\perp$. Sei nun $w \in (U^\perp)^\perp$. Wegen $V = U \oplus U^\perp$, gibt es $u \in U$ und $w' \in U^\perp$ mit $w = u + w'$. Somit gilt für alle $v \in U^\perp$

$$0 = \langle w, v\rangle = \langle u + w', v\rangle = \langle u, v\rangle + \langle w', v\langle = \langle w', v\rangle.$$

Also ist $w' \in U^\perp \cap (U^\perp)^\perp = \{0\}$. Somit gilt $w = u \in U$.

Lösung 13.7:

Voraussetzung: Sei V ein $\mathbb{K}$–Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot\rangle$ und zugehöriger Norm $\|\cdot\|$. Seien U ein Untervektorraum von V, $v \in V$ und $w \in U$.

Behauptung: Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) w ist die orthogonale Projektion von v auf U.

(ii) Für alle $u \in U$ gilt

$$\|v - u\| \geq \|v - w\|.$$

Beweis: Sei w die orthogonale Projektion von v auf U. Dann gilt, wegen $V = U \oplus U^\perp$, dass $v - w \in U^\perp$. Es gilt dann nach dem Satz von Pythagoras für alle $u \in U$:

$$\|v - w + w - u\| = \|v - w\| + \|w - u\| \geq \|v - w\|.$$

Es gelte nun für alle $u \in U$

$$\|v - u\| \geq \|v - w\|.$$

Sei nun w' die orthogonale Projektion von v auf U. Nach dem ersten Teil des Beweises und der Voraussetzung gilt somit

$$\|v - w\| \geq \|v - w'\| \geq \|v - w\|.$$

Betrachtet man die Formel im ersten Teil des Beweises, so sieht man, dass die Gleichheit nur dann gelten kann, wenn $\|w - w'\| = 0$, also $w = w'$ ist.

Lösung 13.8:

(a) Man rechnet

$$\begin{aligned}\langle \cos(\pi x), \sin(\pi x)\rangle &= \int_0^1 \cos(\pi x)\sin(\pi x)dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\sin^2(\pi x)\Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{2\pi}\sin^2(\pi) - \frac{1}{2\pi}\sin^2(0) \\ &= 0.\end{aligned}$$

(b) Man rechnet erneut

$$\begin{aligned}\langle x, 2x^2 - 3x^4\rangle &= \int_0^1 2x^3 - 3x^5 dx \\ &= \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^6\Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - 0 \\ &= 0.\end{aligned}$$

(c) Möchte man die Aufgabe möglichst elgant lösen, so wählt man $f = 0$. Möchte man sie guten Gewissens lösen, so kann man beispielsweise den Ansatz $f(x) = x + a$ wählen und $a \in \mathbb{R}$ so einrichten, dass f orthogonal zu g ist. Es ist

$$\begin{aligned}\langle x + a, 6x^2 - 12x + 3\rangle &= \int_0^1 (x + a)(6x^2 - 12x + 3)dx \\ &= \int_0^1 6x^3 - 12x^2 + 3x + a(6x^2 - 12x + 3)dx \\ &= \frac{3}{2}x^4 - 4x^2 + \frac{3}{2}x^2 + a(2x^3 - 6x + 3x)\Big|_0^1 \\ &= \frac{3}{2} - 4 + \frac{3}{2} + a(2 - 6 + 3) \\ &= -1 - a\end{aligned}$$

Wählt man $a = -1$, so verschwindet obiges Skalarprodukt. Also steht $f(x) = x - 1$ senkrecht auf $g(x) = 6x^2 - 12x + 3$ bezüglich des Skalarprodukts $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Lösung 13.9:

Voraussetzung: Sei K ein Körper, und seien $f, g \in K[X]$ von der Gestalt

$$f = a_m X^m + a_{m-1}X^{m-1} + \cdots + a_0 \text{ und } g = b_n X^n + b_{n-1}X^{n-1} + \cdots + b_0$$

mit $a_m \neq 0 \neq b_n$. Sei außerdem

$$\mathfrak{R}(f, g) := \det \begin{pmatrix} a_m & a_{m-1} & \cdots & \cdots & a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_m & a_{m-1} & \cdots & \cdots & a_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & \cdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_m & a_{m-1} & \cdots & \cdots & a_0 \\ b_n & b_{n-1} & \cdots & \cdots & b_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_n & b_{n-1} & \cdots & \cdots & b_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & \cdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & b_n & b_{n-1} & \cdots & \cdots & b_0 \end{pmatrix}.$$

(In der angegebenen $(m + n) \times (m + n)$ Matrix stehen die Koeffizienten $a_m, \ldots, a_0$ in n Zeilen und die Koeffizienten $b_n, \ldots, b_0$ in m Zeilen.)

Behauptung:

(a) Es gibt genau dann Polynome $p, q \in K[X] \setminus \{0\}$ mit $\deg(p) < n$, $\deg(q) < m$ und $fp = gq$, wenn $\Re(f, g) = 0$ gilt.

(b) Haben f und g eine gemeinsame Nullstelle, so gilt $\Re(f, g) = 0$.

Beweis:

(a) Betrachten wir zuerst ein paar einfache Fälle: Sind m und n beide Null, so ist die oben angegebene Matrix eine 0×0–Matrix, die stets Determinante 1 hat. Also ist $\Re(f, g)$ ungleich 0. Andererseits gibt es aber auch keine von 0 verschiedenen Polynome vom Grad < 0. Somit ist die Aussage in diesem Fall wahr.
Ähnlich verhält es sich im Fall, dass nur $m = 0$ gilt. Die Matrix ist dann eine $n \times n$–Diagonalmatrix, bei der als Diagonalelemente nur a_0 vorkommt. Somit ist in diesem Fall $\Re(f, g) = (a_0)^n \neq 0$. Wieder ist hier die Aussage wahr, weil es keine von 0 verschiedenen Polynome vom Grad < 0 gibt. Analog verhält es sich im Fall, dass nur $n = 0$ ist.
Nun können wir annehmen, dass $m, n > 0$ gilt. Genau dann gibt es $c_0, \ldots, c_{n-1}$, $d_0, \ldots, d_{m-1} \in K$ mit

$$f(c_0 + c_1 X + \cdots + c_{n-1} X^{n-1}) + g(d_0 + d_1 X + \cdots + d_{m-1} X^{m-1}) = 0,$$

wenn folgendes LGS eine Lösung (der Form $c_{n-1}, \ldots, c_0, d_{m-1}, \ldots, d_0$) besitzt:

$$\begin{aligned} a_m y_1 + b_n y_{n+1} &= 0, \\ a_{m-1} y_1 a_m y_2 + b_{n-1} y_{n+1} + b_n y_{n+2} &= 0, \\ \vdots \quad &\vdots \quad \vdots \\ a_0 y_n + b_0 y_{n+m} &= 0. \end{aligned}$$

Die zu dem LGS gehörige Matrix ist aber gerade die Transponierte der oben angegebenen Matrix. Diese beiden Matrizen haben dieselbe Determinante. Somit hat das LGS genau dann eine Lösung, wenn die zu der Matrix gehörige lineare Abbildung einen nichtleeren Kern hat, also wenn die Matrix nicht invertierbar ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn $\Re(f, g) = 0$ gilt.

(b) Nehmen wir an, dass f und g eine gemeinsame Nullstelle $a \in K$ haben. Dann kann man laut Vorlesung aus beiden Matrizen den Faktor $X - a$ herausziehen:

$$f = (X - a)q, \quad g = (X - a)p.$$

Es gilt $\deg(q) < m$, $\deg(p) < n$ und $fp = (X - a)qp = (X - a)pq = gq$. Somit gilt nach Teilaufgabe (a) $\Re(f, g) = 0$.