Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Markus Schweighofer
Aaron Kunert / Sven Wagner

Wintersemester 2009/2010
Lösungsblatt 2
11.11.2009

Lineare Algebra I

Lösung 2.1:

Behauptung: f ist injektiv.

Beweis: Seien $X, Y \in \mathcal{P}(A)$ mit $X \neq Y$. Dann gibt es ein Element $a \in A$, das in genau einer der Mengen X, Y liegt. Nehmen wir an $a \in X$ und $a \notin Y$. Dann ist $\{a\} \in \mathcal{P}(X)$ aber $\{a\} \notin \mathcal{P}(Y)$. Insbesondere ist somit $\mathcal{P}(X) \neq \mathcal{P}(Y)$. Im Falle von $a \notin X$ und $a \in Y$ argumentiert man analog.

Die Abbildung f ist für keine Menge A surjektiv, dies stünde im Widerspruch zum Satz von Cantor.

Lösung 2.2:

(a) Wir betrachten nur den Fall $A \neq \emptyset$ (da war ein Fehler in der Aufgabe. Die Bedingung $A \neq \emptyset$ braucht man gerade für die andere Richtung).
Sei zuerst f injektiv. Wir suchen eine Abbildung $g\colon B \to A$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_A$. Man definiert g folgendermaßen: Wir wählen ein festes $a \in A$. Hat $b \in B$ ein Urbild $\alpha_b \in A$ unter f, so setzen wir $g(b) := \alpha_b$. Man bemerkt, dass α_b eindeutig durch seine Eigenschaft als Urbild von b bestimmt ist. Hat b kein Urbild, so setzen wir $g(b) := a$. Dann rechnet man für $x \in A$ nach: $g(f(x)) = \alpha_{f(x)}$. Da f injektiv ist, gilt $\alpha_{f(x)} = x$ und wir erhalten $g \circ f = \mathrm{id}_A$.

Existiere nun umgekehrt ein $g\colon B \to A$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_A$. Wir wollen daraus folgern, dass f injektiv ist. Angenommen es gibt $x, y \in A$ mit $f(x) = f(y)$ dann folgt auch $x = \mathrm{id}_A(x) = g(f(x)) = g(f(y)) = \mathrm{id}_A(y) = y$. Also ist $x = y$ und somit enthält das Urbild von $f(x)$ nur ein Element.

(b) Sei f surjektiv. Wir konstruieren eine Abbildung $g\colon B \to A$, so dass $f \circ g = \mathrm{id}_B$ ist. Für jedes $b \in B$ wählen wir ein Urbild $\alpha_b \in A$ von b bezüglich der Abbildung f. Da f surjektiv ist, finden wir stets solch ein Urbild, im Allgemeinen ist es jedoch nicht eindeutig.

Anmerkung: An dieser Stelle des Beweises taucht eine subtile Problematik auf. Es existieren unter Umständen für dieses $b \in B$ unendlich viele Urbilder. Darüberhinaus kann es unendlich viele Elemente in der Menge B geben. Es kann also passieren, dass man unendlich oft (für jedes $b \in B$) ein Element aus einer unendlich großen Menge auswählen muss. Es ist leider nicht offensichtlich, dass dies überhaupt möglich ist. Es kommt sogar noch schlimmer. Man kann zeigen, dass die Existenz einer solchen Auswahlmöglichkeit weder bewiesen noch widerlegt werden kann. Man behilft sich aus dieser Misere, indem man die Existenz einer solchen Auswahl fordert und als eigenständiges Axiom zu den Axiomen der Mengenlehre hinzufügt. Wer darüber mehr wissen möchte darf das Internet zum Begriff „Auswahlaxiom" befragen. (Wer schon im Internet danach sucht, sollte das auch mal mit dem Begriff „Banach-Tarski-Paradoxon" tun. Dies ist eine Umformulierung des (scheinbar klaren) Auswahlaxioms zu einer scheinbar unerhörten Behauptung.)

Nimmt man das Auswahlaxiom an (was landläufig so getan wird), dann rechnet man für $b \in B$ nach: $f(g(b)) = f(\alpha_b) = b$, das heißt es ist $f \circ g = \mathrm{id}_B$.

Existiere nun umgekehrt eine Abbildung $g\colon B \to A$ mit $f \circ g = \mathrm{id}_B$. Wir müssen zeigen, dass f surjektiv ist. Sei dazu $b \in B$, dann ist $g(b)$ ein Urbild von b. In der Tat ist $f(g(b)) = \mathrm{id}_B(b) = b$. Somit ist f surjektiv.

(c) Nach Voraussetzung ist f bijektiv und wir müssen zeigen, dass die beiden Abbildungen f^{-1} und g übereinstimmen. Wir betrachten dazu die in der Vorlesung definierte Abbildung $f^{-1}\colon B \to A$ und die Verkettung $g \circ f \circ f^{-1}\colon B \to A$. Nach Voraussetzung gilt $g \circ f = \mathrm{id}_A$. Also ist $g \circ f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_A \circ f^{-1}$. Wir wenden die Proposition aus §1.2 der Vorlesung an.

$$\begin{array}{rcl} & g \circ f \circ f^{-1} & = \mathrm{id}_A \circ f^{-1} \\ \Rightarrow & g \circ \mathrm{id}_B & = f^{-1} \\ \Rightarrow & g & = f^{-1} \end{array}$$

(d) Nach Voraussetzung ist f bijektiv und wir müssen zeigen, dass die beiden Abbildungen f^{-1} und g übereinstimmen. Wir betrachten dazu die in der Vorlesung definierte Abbildung $f^{-1}\colon B \to A$ und die Verkettung $f^{-1} \circ f \circ g\colon B \to A$. Nach Voraussetzung gilt $f \circ g = \mathrm{id}_B$. Also ist $f^{-1} \circ f \circ g = f^{-1} \circ \mathrm{id}_B$. Wieder wenden wir die Proposition aus §1.2 der Vorlesung an.

$$\begin{array}{rcl} & f^{-1} \circ f \circ g & = f^{-1} \circ \mathrm{id}_B \\ \Rightarrow & \mathrm{id}_B \circ g & = f^{-1} \\ \Rightarrow & g & = f^{-1} \end{array}$$

Lösung 2.3:

(a) Voraussetzung: Seien $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ ist gerade}\}$ und $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ ist ungerade}\}$.
Behauptung: $\mathcal{Z} = \{A, B\}$ ist eine Zerlegung von $\mathbb{Z}$.
Beweis: Wir müssen dazu folgende Eigenschaften von A und B nachprüfen:

(i) $A, B \neq \emptyset$,
(ii) $A \cap B = \emptyset$,
(iii) $A \cup B = \mathbb{Z}$.

(i) Die Zahl 1 ist ungerade, also ist $B \neq \emptyset$. Weiter ist 2 gerade, also $A \neq \emptyset$.
(ii) Angenommen $x \in \mathbb{Z}$ wäre sowohl gerade, als auch ungerade. Dann wäre x gleichzeitig durch 2 teilbar und nicht durch 2 teilbar. Solch ein x kann nicht existieren.
(iii) Jede ganze Zahl x ist gerade oder ungerade, das bedeutet es gilt $x \in A$ oder $x \in B$. Damit ist $x \in A \cup B$.

Behauptung: Die zugehörige Äquivalenzrelation lässt sich folgendermaßen beschreiben:

$$x \sim y \iff (x - y) \text{ ist gerade.}$$

Beweis: Man muss zeigen, dass $\sim$ mit $\sim_{\mathcal{Z}}$ übereinstimmt. Seien $x, y \in \mathbb{Z}$ mit $x \sim_{\mathcal{Z}} y$. Dann sind zwei Fälle zu unterscheiden. 1. Fall: $\{x, y\} \subseteq A$, d.h. x und y sind beide gerade, so ist deren Differenz auch gerade. Es gilt also $x \sim y$. 2. Fall: $\{x, y\} \subseteq B$, d.h. x und y sind beide ungerade, so kann man $x = n + 1$ und $y = m + 1$ schreiben, wobei n, m gerade Zahlen sind. Dann ist $x - y = n - m$ eine Differenz von geraden Zahlen und somit gerade, und es gilt auch hier $x \sim y$.
Seien nun $x, y \in \mathbb{Z}$ mit $x \not\sim_{\mathcal{Z}} y$. 1. Fall: x ist eine ungerade Zahl, aber y ist gerade. Dann kann man $x = n+1$ für eine gerade Zahl n schreiben. Dann jedoch ist $x-y = n-y+1$. Hier ist $n - y$ eine Differenz gerader Zahlen, also gerade. Eine gerade Zahl um eins erhöht ist jedoch ungerade, und somit gilt hier $x \not\sim y$. Analog erhält man im Fall x gerade und y ungerade ebenso $x \not\sim y$.

(b) Voraussetzung: Sei $f\colon A \to B$ eine Abbildung.

(i) Wir müssen zeigen, dass $\sim_f$ reflexiv, symmetrisch und transitiv ist. Seien dazu $a, b, c \in A$.

1. Reflexivität: Für ein festes $a \in A$ ist $f(a) = f(a)$ daher ist $a \sim_f a$.
2. Symmetrie: Ist $a \sim_f b$, so ist $f(a) = f(b)$. Offensichtlich ist dann auch $f(b) = f(a)$ und daher folgt $b \sim_f a$.
3. Transitivität: Sei $a \sim_f b$ und $b \sim_f c$, dann ist $f(a) = f(b)$ und $f(b) = f(c)$. Aus der Transitivität der Gleichheitsrelation folgt $f(a) = f(c)$ und somit $a \sim_f c$.

Nun ist gezeigt, dass $\sim_f$ eine Äquivalenzrelation ist.

(ii) Hier zeigen wir die drei Eigenschaften einer Zerlegung:

1. Es ist$f^{-1}(\{f(a)\}) \neq \emptyset$ für alle $a \in A$:
   Dies ist leicht zu zeigen, denn $a \in f^{-1}(\{f(a)\})$.
2. Für $a, b \in A$ folgt aus $f^{-1}(\{f(a)\}) \cap f^{-1}(\{f(b)\}) \neq \emptyset$ schon $f^{-1}(\{f(a)\}) = f^{-1}(\{f(b)\})$:
   Ist $c \in f^{-1}(\{f(a)\}) \cap f^{-1}(\{f(b)\})$, so ist nach Definition $f(c) = f(a)$ und $f(c) = f(b)$. Dann ist auch $f(a) = f(b)$ und somit $f^{-1}(\{f(a)\}) = f^{-1}(\{f(b)\})$ wie gewünscht.
3. Es ist $A = \bigcup\limits_{a \in A} f^{-1}(\{f(a)\})$:
   Wir zeigen beide Inklusionen.
   "$\subseteq$": Ist $a \in A$, so ist $a \in f^{-1}(\{f(a)\})$. Insbesondere ist dann $a \in \bigcup\limits_{a \in A} f^{-1}(\{f(a)\})$
   "$\supseteq$": Ist $x \in \bigcup\limits_{a \in A} f^{-1}(\{f(a)\})$ so gibt es ein $b \in A$ mit $x \in f^{-1}(\{f(b)\})$. Aber $f^{-1}(\{f(b)\})$ ist nach Definition eine Teilmenge von A. Also ist auch $x \in A$.

Damit sind alle Bedingung erfüllt und wir haben gezeigt, dass $\mathcal{Z}_f$ in der Tat eine Zerlegung ist.

(iii) Wir zeigen zuerst $\sim_f = \sim_{\mathcal{Z}_f}$. Dazu muss für $x, y \in A$ die Äquivalenz

$$x \sim_f y \Longleftrightarrow x \sim_{\mathcal{Z}_f} y$$

nachgeprüft werden. Es gilt

$$\begin{aligned} x \sim_f y &\Longleftrightarrow f(x) = f(y) \\ &\Longleftrightarrow f^{-1}(\{f(x)\}) = f^{-1}(\{f(y)\}) \\ &\Longleftrightarrow x \sim_{\mathcal{Z}_f} y \end{aligned}$$

Die letze Äquivalenz folgt aus der Tatsache, dass stets $a \in f^{-1}(\{f(a)\})$ gilt. Damit ist die erste Behauptung gezeigt. Nun beweisen wir, dass $A/\sim_f = \mathcal{Z}_f$ ist mit der üblichen Methode beide Inklusionen zu prüfen.
"$\subset$": Sei X eine Äquivalenzklasse von $\sim_f$.
Ist $x \in X$, so kann man schreiben

$$X = \{a \in A \mid f(x) = f(a)\} = \left\{a \in A \mid a \in f^{-1}(\{f(x)\})\right\} = f^{-1}(\{f(x)\}).$$

Also ist X ein Element der Zerlegung $\mathcal{Z}_f$.

"$\supset$": Sei zu $a \in A$ die Menge $f^{-1}(\{f(a)\}) \in \mathcal{Z}_f$ gegeben.
Wir schreiben

$$f^{-1}(\{f(a)\}) = \{y \in A \mid f(y) = f(a)\} = \{y \in A \mid y \sim_f a\}.$$

Also ist $f^{-1}(\{f(a)\})$ gerade die Äquivalenzklasse von a bezüglich der Äquivalenzrelation $\sim_f$, was den Beweis komplettiert.

Lösung 2.4:

(a) Voraussetzung: Gegeben seien die paarweise verschiedenen Mädchen A_1 := Anastasia, A_2 := Anne, C := Charlotte und N := Nadja sowie die paarweise verschiedenen Jungen J := Johannes, L := Lukas, M_1 := Markus S., M_2 := Markus T., M_3 := Martin, M_4 := Matthias, R := Robin und S := Sebastian.

(i) Die Relation R_1 besteht aus folgenden Elementen:

$$\begin{array}{cccccc} (A_1, A_2) & (A_2, A_1) & (A_2, C) & (C, A_2) & (C, J) & (J, C) \\ (J, L) & (L, J) & (L, M_1) & (M_1, L) & (M_1, M_2) & (M_2, M_1) \\ (M_2, M_3) & (M_3, M_2) & (M_3, M_4) & (M_4, M_3) & (M_4, N) & (N, M_4) \\ (N, R) & (R, N) & (R, S) & (S, R) & (S, A_1) & (A_1, S). \end{array}$$

Sie ist nicht reflexiv, da kein Kind neben sich selbst sitzt. Sie ist symmetrisch, aber nicht transitiv, da z.B. Anastasia neben Anne sitzt und Anne neben Charlotte sitzt, aber Anastasia nicht neben Charlotte sitzt.

(ii) Damit die geforderte Bedingung erfüllt ist, müssen zwischen je zwei Mädchen stets zwei Jungen sitzen. Die Relation R_2 besteht dann aus den folgenden Paaren:

$$\begin{array}{cccccc} (A_1, J) & (J, A_1) & (J, L) & (L, J) & (L, A_2) & (A_2, L) \\ (A_2, M_1) & (M_1, A_2) & (M_1, M_2) & (M_2, M_1) & (M_2, C) & (C, M_2) \\ (C, M_3) & (M_3, C) & (M_3, M_4) & (M_4, M_3) & (M_4, N) & (N, M_4) \\ (N, R) & (R, N) & (R, S) & (S, R) & (S, A_1) & (A_1, S). \end{array}$$

(iii) Die Kinder haben folgendermaßen nummerierte und gefärbte Kuchenstücke:
Matthias, 1, rot
Martin, 2, gelb
Charlotte, 3, blau
Markus T., $4 = 2 \cdot 2$, gelb
Markus S., 5, grün
Anne, $6 = 2 \cdot 3$, gelb-blau
Lukas, 7, orange
Johannes, $8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$, gelb
Anastasia, $9 = 3 \cdot 3$, blau
Sebastian, $10 = 2 \cdot 5$, gelb-grün
Robin, 11, lila
Nadja, $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$, gelb-blau. Demnach stehen bezüglich R_3 die folgenden Kinder in Relation zu Anne: Martin, Charlotte, Markus T., Anne, Johannes, Anastasia, Sebastian, Nadja.
R_3 ist offensichtlich reflexiv und symmetrisch. Sie ist aber nicht transitiv, da z.B. Martin in Relation zu Anne und Anne in Relation zu Charlotte steht, aber Martin nicht in Relation zu Charlotte, da deren Kuchenstücke keine gemeinsame Farbe haben.

(iv) Sie ist nun auch transitiv, da alle Mädchen ein teilweise blau gefärbtes Kuchenstück haben.

(v) Es ist hier noch die Transitivität zu erreichen. Die Kerzen müssen sich auf den Kuchenstücken von Martin, Markus T., Markus S., Johannes und Sebastian befinden, da diese alle ein Kuchenstück haben, welches eine gemeinsame Farbe mit dem Kuchenstück von Sebastian (gelb-grün) hat, aber Markus S. ein rein grünes Kuchenstück hat während Martin, Markus T. und Johannes ein rein gelbes Kuchenstück haben. (Es geht daher sogar mit vier Kerzen, die Kerze auf dem Kuchenstück von Sebastian ist nicht nötig. Zu dem stehen alle ja sowieso schon bzgl. R_3 in Relation.)

(vi) Wir nehmen an, daß alle Kinder, die sich verstecken, auch gefunden werden. Die ursprüngliche Relation R_6 ist nicht reflexiv, da kein Kind sich selbst findet. Sie ist auch nicht symmetrisch, da ein Kind nur einmal gefunden werden kann. Das erste suchende Kind wird zum Beispiel gar nicht gefunden, obwohl es selbst ein anderes Kind findet. Sie ist auch nicht transitiv, da ein Kind nur höchstens ein anderes Kind finden kann. Ändert man die Relation aber so ab, dass alle gefundenen Kinder mit den bisher suchenden Kinder zusammen weitersuchen, so finden sie auch zusammen alle restlichen Kinder. Damit wird die Relation also transitiv.

(b) (i) R_1 ist weder reflexiv noch transitiv, da $(2,2) \notin R_1$. Sie ist aber symmetrisch.

(ii) R_2 ist wieder nicht reflexiv. Sie ist auch nicht symmetrisch, da z.B. $(1,2) \in R_2$, aber $(2,1) \notin R_2$. Sie ist aber transitiv.

(iii) R_3 ist nicht reflexiv und nicht symmetrisch. Sie ist auch nicht transitiv, da z.B. $(1,2)$ und $(2,4)$ darin liegen, aber nicht $(1,4)$.

(iv) R_4 ist die transitive Hülle von R_3, das heißt sie ist durch Hinzufügen aller Relationen entstanden, die man benötigt, um aus R_3 eine transitive Relation zu machen. Durch Nachrechnen erhält man: $R_4 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,4),(3,2),(3,4)\}$. Die Relation ist weder reflexiv noch symmetrisch.

(v) Nach Umformulieren erhält man $R_5 = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid y = -x\} = \{(x,-x) \mid x \in \mathbb{Z}\}$. Diese Relation ist nicht reflexiv, da z.B. $(1,1)$ nicht darin liegt. Sie ist symmetrisch, da $-(-x) = x$ und somit auch stets $(-x,x) \in R_5$ für alle $x \in \mathbb{Z}$ gilt. Sie Relation ist nicht transitiv, da aus $(x,y),(y,z) \in R_5$ stets $y = -x$ und $z = -y$ folgt. Somit ist $z = x$, aber (x,x) ist nicht in R_5, wenn $x \neq 0$ ist.

(vi) Hier erhält man $R_6 = \{(x,x) \mid x \in \mathbb{Z}\}$. Die Relation ist somit reflexiv, symmetrisch und transitiv.

(vii) R_7 ist reflexiv, da $a + b = b + a$ für alle $a,b \in \mathbb{N}$ ist. Sie ist symmetrisch, denn wenn für $a,b,c,d \in \mathbb{N}$ die Gleichheit $a + d = b + c$ gilt, so auch $c + b = d + a$. Die Relation ist außerdem transitiv: Für alle $a,b,c,d,e,f \in \mathbb{N}$ folgt aus $a + d = b + c$ und $c + f = d + e$ stets $a + d + f = b + c + f = b + d + e$. Zieht man nun auf der rechten und der linken Seite der Gleichung jeweils d ab, so erhält man die gewünschte Gleichheit $a + f = b + e$.